

ВЫПУСК

90

Библиотечка КВАНТ

ВЫПУСК

Библиотечка КВАНТ



П.Гнэдиг, Д.Хоньек, К.Райли

ДВЕСТИ

физических задач



## Дорогой читатель!

Если Вы интересуетесь математикой и физикой, любите решать задачи, хотите углубить Ваши знания или расширить их, то Вашим другом и помощником может стать журнал «КВАНТ».

Научно-популярный физико-математический журнал «КВАНТ», единственный в России образовательный журнал для школьников и студентов, выпускается под научно-методическим руководством Российской академии наук. Члены Редакционной коллегии и Редакционного совета журнала — академики и члены-корреспонденты Академии наук, профессора и преподаватели ведущих университетов и вузов страны. Авторы большинства статей «КВАНТА» — действующие на переднем крае науки талантливые ученые и опытные педагоги (некоторым из них именно «КВАНТ» помог сориентироваться в выборе профессии и сферы своей научной деятельности), а также школьники, студенты и аспиранты.

В этом году «КВАНТУ» исполнилось 35 лет. Нам известно, что среди его читателей есть такие, кто упорно подписывается на журнал все годы его жизни. Есть и такие, кто в школьные годы сами читали наш журнал, а теперь выписывают его для своих детей. Есть и те, кто открыл журнал сравнительно недавно. Мы надеемся сохранить всех старых друзей (наших подписчиков), и найти новых.

Наш журнал распространяется только по подписке — один раз в два месяца выходит очередной номер журнала. Подписаться на «КВАНТ» можно с любого номера в любом почтовом отделении связи. Подписной индекс журнала в каталоге «Роспечать» 70465.



БИБЛИОТЕЧКА

**КВАНТ**

ВЫПУСК

**90**

П.Гнэдиг,  
Д.Хоньек, К.Райли

# ДВЕСТИ

интригующих  
физических  
задач

(Избранные задачи  
международных  
олимпиад)

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО  
ПОД РЕДАКЦИЕЙ С.С.КРОТОВА



Техносфера

Москва

2005

УДК 373.167.1:53+53(075.3)  
ББК 22.3я721  
Г56

Серия  
«Библиотечка «Квант»  
основана в 1980 г.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Б.М.Болотовский, А.А.Варламов, В.Л.Гинзбург,  
Г.С.Голицын, Ю.В.Гуляев, М.И.Каганов, С.С.Кротов,  
С.П.Новиков, Ю.А.Осипьян (председатель),  
В.В.Произволов, Н.Х.Розов, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,  
В.М.Тихомиров, А.Р.Хохлов, А.И.Черноуцан (ученый  
секретарь)

Научный редактор выпуска С.С.Кротов

**Гнэдиг П., Хоньек Д., Райли К.**

Г90 Двести интригующих физических задач. Перевод с англ.  
– М.: Бюро Квантум, Техносфера, 2005. — 272 с. (Библиотечка «Квант». Вып. 90)

ISBN 5-85843-055-4

Книга представляет собой сборник задач, предлагавшихся в разные годы на Международных физических олимпиадах школьников. Ко всем задачам даны указания и подробные решения, снабженные большим количеством рисунков. Задачи охватывают все разделы школьной физики, но порой и выходят за ее пределы.

Для учащихся средних школ, лицеев и гимназий, для членов и руководителей физических кружков и факультативов, а также для всех тех, кому просто интересна физика.

ББК 22.3я721

## 200 Puzzling Physics Problems

With Hints  
and Solutions

PETER GNÄDIG,  
GYULA HONYEK  
& KEN RILEY

Cambridge  
UNIVERSITY PRESS

ISBN 5-85843-055-4  
ISBN 0-521-77306-7 (англ.)

© Cambridge University Press, 2002  
© Бюро Квантум, РИЦ Техносфера,  
перевод и оформление, 2005

## ПРЕДИСЛОВИЕ ОТ РЕДАКЦИИ

---

*Deliberando discitur sapientia*  
*Раздумья всех нас учат мудрости*

Когда появилось предложение об издании на русском языке в серии научно-популярных книг «Библиотечка «Квант» книги «200 Puzzling Physics Problems», авторы Peter Gnädig, Gyula Honyek, Ken Riley, мы подвергли ее пристрастной и «перекрестной» экспертизе. Прежде всего, мы хотели понять, не является ли эта книга еще одной, пусть на английском языке, компиляцией физических сюжетов из широко известных и доступных источников, — иначе своим появлением она может принести разочарование требовательным читателям.

Сразу скажем, что вы не будете разочарованы. Костяк книги действительно составляют красивые задачи Международных физических олимпиад прошлых лет и известные задачи-изюминки из числа уже вошедших в наши классические сборники задач. Однако даже искушенный читатель найдет в книге значительное число малоизвестных оригинальных задач.

К важному достоинству книги стоит отнести разумную количественную сбалансированность как относительно простых, так и сложных, а порой и очень сложных, задач (как это принято, трудные и очень трудные задачи отмечены значками «\*» и «\*\*»). Все задачи снабжены «подсказками» и подробными решениями, иногда заканчивающимися любопытными примечаниями.

Заметим, что математический аппарат, используемый в решениях, в основном не выходит за рамки элементарной алгебры, лишь иногда требуется обращение к дифференциальному исчислению.

Таким образом, готовя книгу к русскоязычному изданию, мы исходили из того, что она будет полезной и интересной как школьникам, студентам и педагогам, так и просто любителям и собирателям «вкусных» задач по физике.

Хотя предлагаемая авторами очередность задач нашим читателям может показаться неестественной – например, задачи по оптике попали «внутрь» книги, а не в конец, что соответствовало бы школьной и вузовской программам по физике, – мы из уважения к авторам не стали менять порядок расположения задач. И вообще, чтобы не было недоразумений, честно признаемся, что наше «силовое участие» при подготовке книги к печати ограничилось лишь исправлением явных промахов или ничем не обоснованных нагромождений в решениях задач. Такие решения мы написали заново. Думаем, что авторы книги не воспримут указанный жест как вмешательство, а, в соответствии с существующей в сообществе композиторов задач профессиональной традицией, будут снисходительны, тем более что с двумя из них нас связывают годы совместной работы в жюри Международных олимпиад по физике.

Хочется надеяться, что предлагаемая книга, во-первых, обогатит заинтересованных читателей с содержательной точки зрения, а во-вторых, послужит формированию физического стиля мышления и развитию вкуса к живой физике.

Изыщным завершением сборника является задача 200 о пузырьках в шампанском. Приглашая читателей книги присоединиться к нашему привету ее авторам, предлагаем, помимо шампанского в конце (о чем в книге имеется не просто намек, а четкое указание к действию), вначале налить чашечку крепкого, по-настоящему заваренного чая и, как в свое время великий Эйнштейн, помешав ложечкой, удивиться тому, что чаинки соберутся в ... центре дна. А затем, сделав первый глоток, неспешно переходите к работе над книгой.

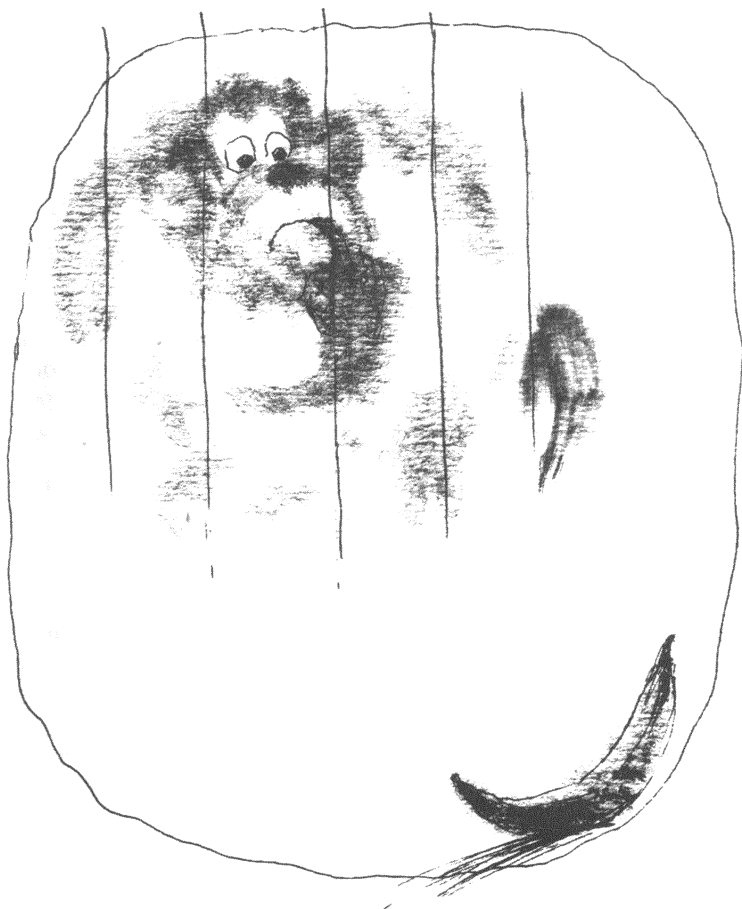
Желаем успехов!

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

---

## УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

*Omne ignotum pro magnifico est*  
*Все неизвестное кажется грандиозным*



**У1.** Три маленькие улитки в исходном положении находятся в вершинах равностороннего треугольника со стороной  $a = 60$  см. В некоторый момент времени все приходит в движение: первая улитка движется ко второй, вторая – к третьей, третья – к первой с одинаковыми и постоянными по величине скоростями  $v = 5$  см/мин. Во время движения каждая улитка всегда оказывается впереди по отношению к соответствующей следующей улитке. Сколько пройдет времени и какой путь пройдут улитки до того, как они встретятся? Каковы уравнения их траекторий? Если улитки считать точечными, то сколько раз каждая улитка повернется вокруг точки их встречи?

**У2.** Маленький предмет покоится на краю горизонтального стола. Его толкают таким образом, что он падает с другой стороны стола, ширина которого 1 м, через 2 с. Имеет ли предмет колеса?

**У3.** Лодка может плыть в стоячей воде со скоростью  $v = 3$  м/с. Лодочник хочет переплыть реку постоянной ширины по самому короткому пути. В каком направлении по отношению к берегу он должен грести, если скорость  $u$  воды в реке равна: а)  $u = 2$  м/с; б)  $u = 4$  м/с? Считайте, что скорость воды в реке везде одинакова.

**У4.** Длинный тонкий гибкий ковер лежит на полу. Один конец ковра загнули и с постоянной горизонтальной единичной скоростью потянули назад над той частью ковра, которая покоится (рис.1). Найдите скорость центра масс движущейся части ковра. Какова минимальная сила,

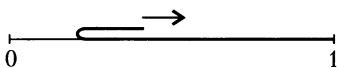


Рис. 1

необходимая для того, чтобы тянуть движущуюся часть ковра, если ковер имеет единичную длину и единичную массу?

**У5.** Четыре черепашки движутся равномерно и прямолинейно по очень большой плоской поверхности. Направления их траекторий произвольны (но не параллельны, т.е. любые две черепашки могли бы встретиться), при этом пересечься в какой-либо точке могут не более двух траекторий. На текущий момент произошли уже пять встреч из  $(4 \times 3)/2 = 6$  возможных. Можно



ли тогда с определенностью сказать, что шестая встреча тоже произойдет?

**У6.** Два плоских червя, массой 20 г каждый, взбираются по очень тонкой вертикальной стене высотой 10 см. Один из них имеет длину 20 см, другой – только 10 см, но он шире первого. Какой из червей проделал большую работу против гравитации и во сколько раз к моменту, когда каждый червь перегнулся в точности пополам через верхнюю кромку стены?

**У7.** Человек ростом  $h_0 = 2$  м, привязанный гибким упругим тросом за ногу, прыгает вниз с платформы, возвышающейся над озером на высоте  $h = 25$  м (рис.2). Другой конец троса прикреплен к платформе. Человек начинает падать из состояния покоя, находясь в вертикальном положении.

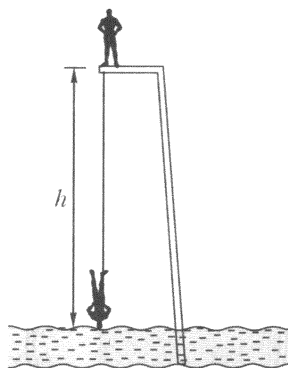


Рис. 2

Длина и упругие свойства троса выбраны так, чтобы скорость человека обратилась в ноль в тот момент, когда его голова достигнет поверхности воды. В конце концов прыгун зависает на тросе вверх ногами, а его голова находится на высоте  $\Delta h = 8$  м над поверхностью воды.

а) Найдите длину троса в нерастянутом состоянии.

б) Найдите максимальные скорость и ускорение, которые достигаются во время падения.

**У8.** Айсберг, выступающий над водной поверхностью на 10 м, представляет собой вертикально расположенную правильную пирамиду. Пренебрегая любым вынужденным движением воды, найдите период малых колебаний айсберга по вертикали. Плотность льда  $900 \text{ кг/м}^3$ .

**У9.** Пружины подвески у всех четырех колес автомобиля одинаковы. На сколько корпус автомобиля возвышается над каждым из колес, когда его правое переднее колесо припарковано на тротуаре высотой 8 см? Изменится ли результат, если автомобиль припаркован обоими правыми колесами на тротуаре? Зависит ли результат от количества и местоположения людей в автомобиле?

**У10\*.** В романе Виктора Гюго «Отверженные» главный герой Жан Вальжан, бежавший заключенный, обладал способностью взбираться вверх по углу, образованному пересечением двух вертикальных перпендикулярных друг другу стен. Найдите

минимальную силу, с которой он должен был при этом отталкиваться от стен. Какой минимальный коэффициент трения покоя необходим для осуществления такого движения?

**У11.** Тонкостенная сферическая оболочка, образованная прочным соединением двух однородных полусфер из материалов разной плотности, помещена на наклонную плоскость. Может ли такое тело оставаться в равновесии, если угол наклона плоскости к горизонту равен  $30^\circ$ ?

**У12.** Маленький упругий шарик падает вертикально на плоскость, наклоненную под углом  $\alpha$  к горизонту. Верно ли, что расстояния между последовательными точками ударов шарика растут в арифметической прогрессии? Считайте, что столкновения абсолютно упругие, а сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

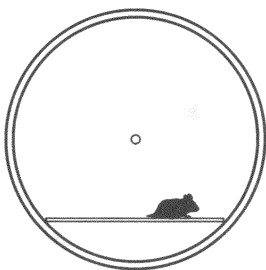


Рис. 3

**У13.** Клетка-колесо (рис.3) может вращаться вокруг горизонтальной оси с пренебрежимо малым трением. Внутри клетки ниже оси закреплена горизонтальная платформа. Клетку приводят в положение равновесия и на один конец платформы сажают хомяка. Как должен бежать по платформе хомяк после освобождения колеса, чтобы оно не вращалось?

**У14\*.** Велосипед удерживается так, чтобы он не мог упасть набок, но мог двигаться вперед или назад; его педали находятся в самом верхнем и самом нижнем положениях. Студент приседает рядом с велосипедом и прикладывает к нижней педали горизонтальную силу, направленную в сторону заднего колеса.

Как будет двигаться велосипед?

Вращается ли его зубчатое колесо в том же направлении, что и заднее колесо, или в противоположном?

Как движется нижняя педаль относительно земли?

**У15.** Если бы все линейные размеры Солнечной системы были пропорционально сокращены так, чтобы среднее расстояние между Солнцем и Землей стало 1 м, то какова была бы продолжительность одного года? Считайте, что плотность небесных тел при этом не меняется.

**У16.** Если бы масса каждого компонента двойной звезды была равна массе Солнца и расстояние между ними было равно расстоянию от Земли до Солнца, то каким был бы их период обращения?

**У17.** а) Какой должна быть минимальная скорость запуска ракеты, чтобы вывести спутник на круговую орбиту?

б) Во сколько раз больше энергии требуется для запуска спутника на полярную орбиту по сравнению с выводом его на экваториальную орбиту?

в) Какую начальную скорость должен иметь космический зонд, чтобы покинуть гравитационное поле Земли?

г) Для чего требуется бóльшая начальная энергия космического зонда – чтобы покинуть Солнечную систему или достичь Солнца?

**У18.** Ракета должна покинуть гравитационное поле Земли. Количество топлива в ее главном двигателе немного меньше, чем это необходимо. Но можно воспользоваться еще и вспомогательным двигателем, правда лишь на короткое время. Когда лучше всего включить вспомогательный двигатель: во время взлета или когда ракета практически остановится относительно Земли? Или это не имеет значения?

**У19.** Стальной шарик объемом  $1 \text{ см}^3$  падает с постоянной скоростью  $v = 1 \text{ см/с}$  в закрытом сосуде, заполненном медом (рис.4). Каков импульс меда, если его плотность  $2 \text{ г/см}^3$ ?

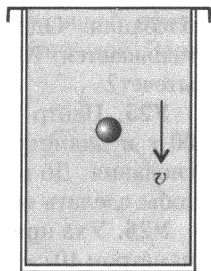


Рис. 4

**У20.** Стенки замкнутого сосуда первоначально имеют температуру  $T_1$ . Сосуд заполняют газом с температурой  $T$ . В каком случае газ оказывает более высокое давление на стенки сосуда: если  $T_1 < T$  или если  $T_1 > T$ ?

**У21\*.** Рассмотрим два одинаковых железных шара, один из которых лежит на теплоизолирующей подставке, а другой висит на теплоизолирующей нити (рис.5). К этим двум шарам подводят равные количества теплоты. Какой шар будет иметь бóльшую температуру?

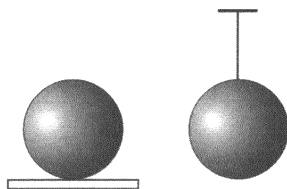


Рис. 5

**У22.** Два студента (не физики) А и Б, живущие в соседних комнатах колледжа, решили сэкономить, соединив свои потолочные светильники последовательно. Они договорились, что установят лампочки по 100 Вт в своих комнатах и будут оплачивать равные доли счета за электричество. Однако каждый решил попробовать получить лучшее освещение за счет другого: студент А установил лампочку в 200 Вт, а студент Б – лампочку в 50 Вт.



Рис. 6

Какой студент впоследствии провалит экзамены за очередной семестр?

**У23.** Если батарея с напряжением  $U$  подсоединена к электрическим клеммам 1 черного ящика, показанного на рисунке 6, то вольтметр, подсоединенный к электрическим клеммам 2, показывает напряжение  $U/2$ . Если же эту батарею подключить к клеммам 2, то вольтметр, подсоединенный к клеммам 1, покажет напряжение  $U$ . Черный ящик содержит только пассивные элементы. Какие это элементы?

**У24.** Ведро с водой подвешено на веревке. Его отклоняют от положения равновесия и отпускают. В системе начинаются колебания. Однако ведро протекает, и уровень воды в нем уменьшается. Как изменится период колебаний, когда вся вода вытечет?

**У25.** Центр тяжести пустой тонкостенной мензурки массой 100 г и диаметром 60 мм находится на расстоянии 100 мм от основания. До какой высоты нужно заполнить мензурку водой, чтобы сделать ее наиболее устойчивой?

**У26.** Уха приготовлена в полусферической медной кастрюле диаметром 40 см. Чтобы уха быстрее остыла, кастрюлю опускают в озеро (рис.7). При этом она плавает, погрузившись в воду на 10 см. Зачерпнет ли кастрюля воды, если цепочку, прикрепленную к краю кастрюли, подтянуть вверх на 10 см?

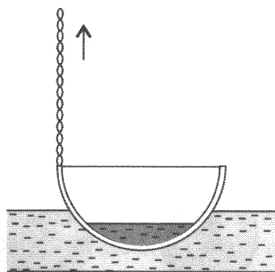


Рис. 7

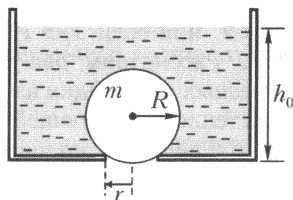


Рис. 8

**У27.** Круглое отверстие радиусом  $r$  в дне сосуда, первоначально заполненного водой, для герметизации закрыто шаром массой  $m$  и радиусом  $R > r$  (рис.8). Уровень воды теперь медленно понижают, и, когда он достигает некоторого значения  $h_0$ , шар поднимается над отверстием. Найдите  $h_0$ .

**У28.** Мыльные пузыри, заполненные гелием, плавают в воздухе. Чья масса больше: оболочки пузыря или гелия внутри оболочки?

**У29.** В вертикальной капиллярной трубке, опущенной в сосуд с водой, вода поднимается до высоты  $H$ . Три изогнутые трубки  $a$ ,  $b$  и  $c$ , сделанные из такого же материала, опущены одним концом в сосуд с водой, как показано на рисунке 9. Будет ли вода вытекать из

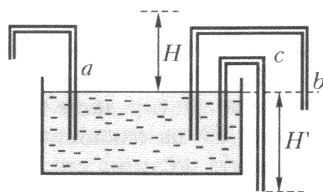


Рис. 9

**У30.** Заряженный сферический конденсатор в результате небольшой проводимости заполняющего его диэлектрика медленно разряжается. Какова величина и направление магнитного поля, вызванного током саморазряда?

**У31.** Радиус электрически заряженной проводящей сферы (рис. 10) изменяется периодически с заданной амплитудой. Заряды на ее поверхности можно рассматривать как множество излучающих диполей. Какова диаграмма направленности излучения сферы?

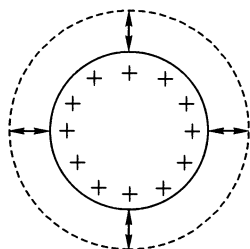


Рис. 10

**У32\*.** Каким бы был мировой рекорд по прыжкам в высоту среди мужчин (на соревнованиях в закрытом помещении) на Луне?

**У33.** Маленький шарик  $B$  лежит на краю стола высотой 1 м, другой такой же шарик  $A$  подвешен на нити длиной 1 м и представляет собой математический маятник (рис. 11). Если нить с шариком  $A$  привести в горизонтальное положение и отпустить, то между шариками произойдет упругое столкновение. Рассматривая движение шарика  $B$  только до момента его падения на землю, ответьте на вопросы:

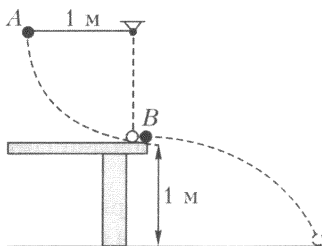


Рис. 11

а) какой шарик дольше находится в движении;

б) у какого шарика больше длина траектории?

**У34.** Маленький груз закреплен на одном конце нити длиной  $L = 50$  см. Вследствие вынужденного движения другого конца нити груз движется с постоянной скоростью  $v = 3,0$  м/с в вертикальной плоскости по кругу радиусом  $R = 50$  см. Начертите «траектории» обоих концов нити для промежутков кругового

движения груза в  $15^\circ$ , указывая на каждой «траектории» положения концов нити в один и тот же момент времени.

**У35.** Точка  $P$ , расположенная над наклонной плоскостью, соединяется отрезком прямого тонкого стержня с некоторой точкой  $P'$  на наклонной плоскости. Маленькое кольцо может скользить по этому стержню без трения из точки  $P$  в точку  $P'$ . Как должна быть выбрана точка  $P'$ , чтобы время движения кольца было минимальным?

**У36.** Минутная стрелка церковных часов вдвое длиннее, чем часовая. В какой момент после полуночи конец минутной стрелки будет удаляться от конца часовой стрелки с наибольшей скоростью?

**У37.** Под каким углом к горизонту нужно бросить камень, чтобы он при движении все время удалялся от бросающего?

**У38\*.** Ствол дерева диаметром  $D = 20$  см лежит на горизонтальной земле. Ленивый кузнечик хочет перепрыгнуть через ствол. Найдите минимальную скорость прыжка кузнечика, чтобы он смог осуществить свой замысел. Соппротивление воздуха не учитывать.

**У39\*.** Прямая однородная тонкая соломинка покоится на гладкой доске. На каждом ее конце сидит по блохе. Покажите, что если масса  $M$  соломинки не слишком большая по сравнению с массой  $m$  каждой из блох, то они могут одновременно прыжками с одинаковыми скоростью и углом взлета перепрыгнуть с одного конца соломинки на другой без столкновения друг с другом в воздухе.

**У40.** Фонтан состоит из маленького полусферического распылителя, который находится на поверхности воды в бассейне, как показано на рисунке 12. Распылитель имеет множество равномерно распределенных маленьких отверстий, через которые вода вытекает с одинаковой скоростью во всех направлениях. Какова форма водяного «колокола», сформированного струями?



Рис. 12

**У41.** Частица массой  $m$ , имеющая электрический заряд  $Q$ , находится под воздействием однородного поля тяжести и однородного горизонтального электрического поля напряженностью  $E$ . Частица начинает движение со скоростью  $v$  под углом  $\theta$  к горизонту в вертикальной плоскости, параллельной электрическому полю. На какое максимальное расстояние может переместиться частица вдоль исходной горизонтали?

**У42\*\*.** Однородный стержень массой  $m$  и длиной  $L$  находит-

ся в горизонтальном положении, опираясь концами на два моих указательных пальца. Пока я медленно сдвигаю пальцы, чтобы они встретились под центром стержня, он скользит либо по одному, либо по другому пальцу. Какую работу я должен совершить в течение всего процесса, если даны коэффициенты трения покоя  $\mu$  и трения скольжения  $\mu_{\text{ск}}$  ( $\mu_{\text{ск}} \leq \mu$ )?

**У43.** Четыре одинаковых кирпича лежит друг на друге на краю стола. Можно ли их сместить горизонтально вдоль друг друга таким образом, чтобы самый верхний оказался полностью вне области стола? Каков будет теоретический предел смещения самого верхнего кирпича, если количество кирпичей произвольно увеличивать?

**У44.** Пластина, согнутая посередине под прямым углом, помещена на горизонтальный неподвижный цилиндр радиусом  $R$ , как показано на рисунке 13. Каким должен быть коэффициент трения покоя между цилиндром и пластиной, чтобы пластина не соскользнула с цилиндра?

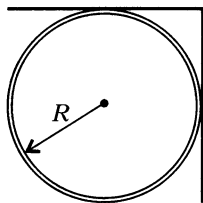


Рис. 13

**У45.** Два упругих шара массами  $m_1$  и  $m_2$  удерживают один над другим с незначительным зазором (рис.14). Затем их одновременно отпускают, и они падают на землю. Каким должно быть отношение  $m_1/m_2$ , при котором верхний шар в конечном счете получает наибольшую часть всей энергии? Какое отношение масс является необходимым, чтобы верхний шар подпрыгнул так высоко, насколько это возможно?

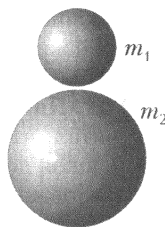


Рис. 14

**У46.** Демонстрационная игрушка состоит из почти касающихся друг друга стальных шаров с массами  $M$ ,  $\mu$  и  $m$ , подвешенных так, что их центры лежат на общей горизонтали. Шар массой  $M$  отклоняют в сторону в их общей плоскости, пока его центр не поднимется на высоту  $h$ , и отпускают. Считая, что столкновения абсолютно упругие и что  $M \neq m$ , найдите массу шара  $\mu$ , при которой шар массой  $m$  поднимется до наибольшей высоты. Какова эта высота? Множественные столкновения шаров не учитывать.

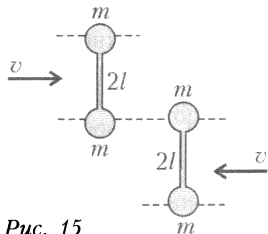


Рис. 15

**У47.** Две одинаковые гантели движутся друг к другу без вращения по горизонтальному столу на воздушной подушке (рис.15). Каждую гантель мож-

но рассматривать как две точечные массы  $m$ , скрепленные невесомым стержнем длиной  $2l$ . Опишите движение гантелей после их упругого столкновения. Изобразите зависимости скоростей центров масс гантелей от времени.

**У48.** Две одинаковые маленькие шайбы  $A$  и  $B$  могут скользить без трения по льду замерзшего озера. Они соединены легкой, нерастяжимой, но упругой нитью длиной  $\sqrt{2}L$ . В момент времени  $t = 0$  шайба  $A$  покоится в точке с координатами  $(0, 0)$ , а шайбе  $B$ , которая находится в точке с координатами  $(L, 0)$ , сообщают скорость  $v$  вдоль оси  $y$  в положительном направлении. Определите координаты и скорости шайб  $A$  и  $B$  в моменты времени  $t_1 = 2L/v$  и  $t_2 = 100L/v$ .

**У49\*.** Прямоугольная кювета наполняется через кран водой в течение времени  $T_1$ . Если кран закрыть, а открыть сливное отверстие в дне кюветы, то она опустошается за время  $T_2$ . Что будет, если открыть одновременно кран и сливное отверстие? При какой величине отношения  $T_1/T_2$  кювета может переполниться? Рассмотрите случай, когда  $T_1 = 3$  мин, а  $T_2 = 2$  мин.

**У50.** Цилиндрический сосуд высотой  $h$  и радиусом  $a$  на две трети заполнен жидкостью. Он вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  относительно его вертикальной оси. Найдите выражение для наибольшей угловой скорости вращения  $\Omega$ , при которой жидкость не переливается через край сосуда. Поверхностным натяжением пренебречь.

**У51.** Питер, который наблюдал за автомобильными гонками, рассчитал, что если один из автомобилей при разгоне из состояния покоя до скорости  $100$  км/ч истратил  $x$  литров топлива, то использование следующих  $3x$  литров топлива могло бы увеличить его скорость до  $200$  км/ч. Питер знал, благодаря физике, что кинетическая энергия пропорциональна квадрату скорости, и предположил, что энергосодержание топлива было главным образом преобразовано в кинетическую энергию, т.е. он пренебрег всеми типами трения.

Пол, который также разбирается в физике, видел начало гонки из окна поезда, идущего со скоростью  $100$  км/ч в противоположном направлении по отношению к движению автомобиля. Он рассуждал так: поскольку скорость автомобиля увеличилась со  $100$  до  $200$  км/ч в течение первого этапа, то для разгона автомобиля с  $200$  до  $300$  км/ч на втором этапе ему потребуется  $(300^2 - 200^2)x / (200^2 - 100^2) = (5/3)x$  литров топлива.

Кто прав, Питер или Пол?



**У52.** Источник света находится в точке  $S$  на расстоянии  $L = 120$  см от экрана. Перемещением линзы вдоль перпендикуляра, опущенного из точки  $S$  на плоскость экрана, получают два резких изображения, причем отношение размеров изображений  $\alpha = 1/9$ . Чему равно фокусное расстояние линзы? Какое изображение является более ярким? Определите отношение яркостей этих изображений.

**У53.** Близорукий человек постепенно отодвигает свои очки от глаз и наблюдает через них за неподвижным предметом. Он удивлен, видя, что сначала предмет выглядит все меньше и меньше, а потом вдруг становится больше и больше. Какова причина этого?

**У54.** Стеклопальная призма, имеющая в сечении равнобедренный треугольник, касается своим основанием поверхности воды (рис.16). Углы при основании призмы равны  $\theta$ . Луч света, идущий вдоль поверхности воды перпендикулярно оси призмы, преломляясь на первой поверхности призмы, испытывает полное внутреннее отражение от водной поверхности, преломляется на второй поверхности призмы и вновь выходит в воздух. Считая что, коэффициенты преломления стекла и воды равны  $3/2$  и  $4/3$  соответственно, покажите, что, по крайней мере,  $\theta = 25,9^\circ$ .

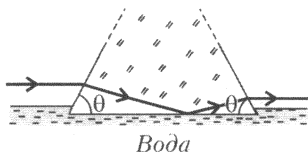


Рис.16

**У55.** Стеклопальная призма в форме четверти цилиндра лежит на столе. Однородный пучок света падает перпендикулярно на ее вертикальную поверхность, как показано на рисунке 17. В каком месте стола вне призмы будет видно световое пятно, если радиус цилиндра  $R = 5$  см, а коэффициент преломления стекла  $n = 1,5$ ?

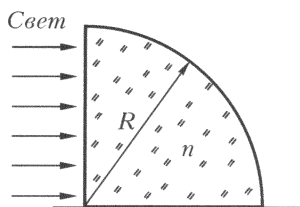


Рис.17

**У56.** Насколько солнечный свет ярче лунного? Альbedo (коэффициент отражения) Луны равен  $\alpha = 0,07$ .

**У57.** Энни и ее очень высокий друг Энди любят вместе бегать трусцой. Они заметили, что при беге у них более или менее одинаковая скорость, но, когда они идут, Энди идет всегда быстрее. Как можно объяснить это различие между бегом и ходьбой, используя физические доводы?

**У58.** Математический маятник и однородный стержень одной и той же длины отклоняют до горизонтальных положений и



Рис. 18

отпускают (рис.18). Каково отношение их периодов колебаний?

**У59\*.** Вертолет может зависать при выходной мощности двигателя  $P$ . Второй вертолет – точная копия первого, но его линейные размеры в два раза меньше. Какая необходима выходная мощность, чтобы второй вертолет смог зависнуть?

**У60\*.** Однородный стержень поставили одним концом на край стола в почти вертикальном положении и отпустили. Стержень начинает падать в сторону от стола, как бы вращаясь

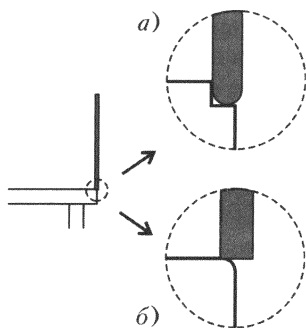


Рис. 19

вокруг горизонтальной оси. Найдите угол между стержнем и вертикалью в том момент, когда стержень отрывается от стола. Считая, что длина стержня намного больше его диаметра, исследуйте два крайних случая:

а) Край стола гладкий (трение незначительно), но имеет маленькое, с единственным уступком углубление, как показано на рисунке 19,а.

б) Край стола шероховатый (трение большое) и очень острый, что означает, что радиус кривизны края намного меньше толщины стержня. Половина лицевой поверхности выходит за край стола (рис.19,б), так что в итоге стержень вращается относительно края стола.

**У61\*\*.** Карандаш удерживают на столе в вертикальном положении заостренным концом вниз. После того как его отпустили, он начинает падать (рис.20). Как движется при этом

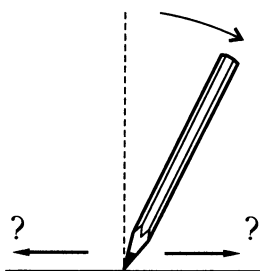


Рис. 20

острие карандаша в зависимости от коэффициента трения? Оторвется ли острие карандаша от стола (в отличие от случая, когда в результате скольжения место заточки карандаша в конце концов соприкоснется со столом)?

**У62.** Два мыльных пузырька радиусами  $R_1$  и  $R_2$  соединяются соломинкой. Воздух идет от одного пузырька к другому (от какого к какому?), и образуется только один пузырек радиусом  $R_3$ . Каков коэффициент поверхностного

натяжения мыльного раствора, если атмосферное давление равно  $p_0$ ? Насколько надежен метод определения коэффициента поверхностного натяжения жидкостей по измерению радиусов этих трех пузырьков?

**У63.** Вода, смачивающая стекло, находится между двумя параллельными стеклянными пластинами. Расстояние между пластинами  $d$ , диаметр водяного «пятна»  $D \gg d$ . С какой силой притягиваются пластины?

**У64.** Голодный паук приготовился поймать насекомое, если оно окажется в паутинке, которая натянута между ним и стеной.

Длина нити 1 м. На нить попала гусеница (рис.21). Увидев паука, она стала уползать от него к стене со скоростью  $v_1 = 1 \text{ мм/с}$  относительно нити, а паук, оставаясь на месте,

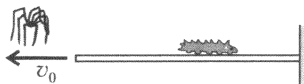


Рис.21

стал вытягивать свой конец нити со скоростью  $v_0 = 1 \text{ см/с}$ , считая, что нить может растягиваться без ограничений. Доползет ли гусеница до стены?

**У65\*.** Как изменится решение предыдущей задачи, если паук не сидит на месте, а удаляется от стены, увлекая за собой конец нити?

**У66.** В вертикально расположенную доску горизонтально вбиты гвозди без шляпок, торчащие из доски на несколько сантиметров. Как показано на рисунке 22, маленький стальной шарик бросают в точке  $A$  (в левом верхнем углу доски) так, чтобы он достиг точки  $B$  (правого нижнего угла доски), упруго подпрыгивая на выступающих гвоздях. Можно ли расположить гвозди так, чтобы:

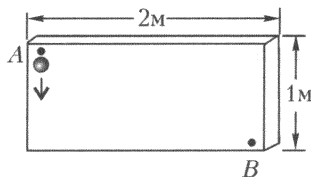


Рис.22

а) шарик перелетел из точки  $A$  в точку  $B$  быстрее, чем если бы он скользил без трения вниз по кратчайшему расстоянию, т.е. по прямой линии  $AB$ ;

б) шарик достиг точки  $B$  за время  $t < 0,4 \text{ с}$ ?

**У67.** Один конец веревки закреплен на вертикальной стене, а к другому приложена горизонтальная сила  $F = 20 \text{ Н}$ . Форма гибкой веревки изображена на рисунке 23. Найдите массу веревки.

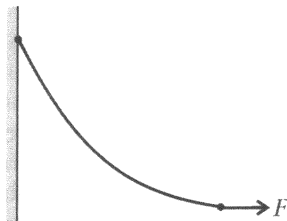


Рис.23

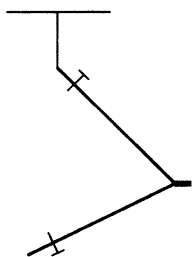


Рис. 24

**У68.** Измеритель готвальни подвешивают на нити за конец одной из его игл (рис.24). Чему должен быть равен угол раствора измерителя, чтобы его вершина была максимально удалена от вертикали, проходящей через точку подвеса?

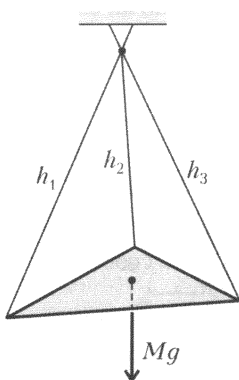


Рис. 25

**У69\*.** Однородная треугольная пластина массой  $M$  подвешена в одной точке на трех тонких нитях длиной  $h_1$ ,  $h_2$  и  $h_3$ , закрепленных в ее вершинах (рис.25). Чему равно натяжение каждой нити, выраженное в зависимости от длин нитей и массы пластины?

**У70\*.** Цистерна, заполненная жидкостью, находится в покое на горизонтальном железнодорожном пути (рис.26). Снизу цистерны у левого края имеется верти-

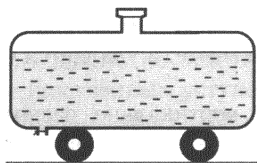


Рис. 26

кальная труба с краном. Как начнет двигаться цистерна, если открыть кран? Как долго продолжится движение цистерны в этом направлении? Считайте, что всякое трение отсутствует.

**У71.** Две маленькие бусинки могут скользить без трения по длинным параллельным горизонтальным стержням, расстояние между которыми  $d$  (рис.27). Бусинки имеют массы  $m$  и  $M$  и электрические заряды  $q$  и  $Q$  соответственно. Сначала бусинка массой  $M$  покоится, а другая, находясь далеко от первой, начинает приближаться к ней со скоростью  $v_0$ . Опишите последующее движение бусинок.

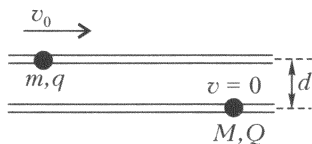


Рис. 27

**У72\*.** Много бусинок с одинаковыми массами находятся в покое на длинном горизонтальном стержне. Расстояния между любыми соседними бусинками одинаковы. Бусинки могут двигаться без трения. На левую бусинку начинает действовать постоянная, горизонтальная, направленная вправо сила  $F$ . Како-

вы скорости левой бусинки и фронта «ударной волны», которая будет распространяться спустя некоторое время, если удары считать:

- а) абсолютно неупругими;
- б) абсолютно упругими?

**У73\*.** Большой кувшин и бочку с пивом поставили на платформу весов. Бочка находится выше кувшина. Кран в бочке открывают и начинают наливать пиво в кувшин. Как изменяются при этом показания весов?

**У74.** Струя воды падает под углом  $\alpha$  к вертикали на горизонтальный желоб полукруглого сечения (рис.28). Струя и ось желоба находятся в одной вертикальной плоскости. Как зависит отношение масс воды, вытекающей из двух концов желоба, от угла падения струи?

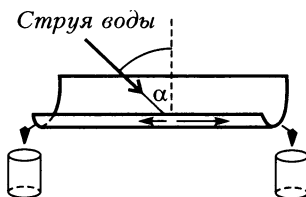


Рис. 28

**У75\*.** Открытый сверху цилиндрический сосуд диаметром  $D$  имеет внизу малое отверстие диаметром  $d$ , закрытое заслонкой. Сосуд устанавливают вертикально и наливают в него воду до высоты  $h$  (рис.29). Если заслонку удалить, вода начинает вытекать. Спустя некоторое время установления  $\tau$  вытекающая

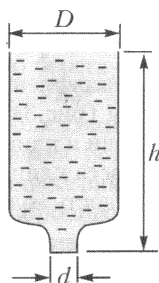


Рис. 29

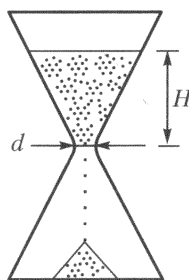


Рис. 30

вода приобретает скорость  $v = \sqrt{2gh}$ . Оцените порядок величины  $\tau$ . Каково ускорение самого нижнего слоя воды в момент, когда удаляют заслонку? Вязкостью воды пренебречь.

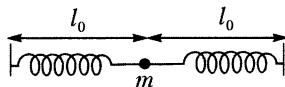


Рис. 31

**У76\*.** Получите аргументированную оценку времени пересыпания песка в песочных часах из верхнего сосуда в нижний (рис.30). Используйте реальные данные.

**У77.** Нерастянутая легкая пружина закреплена своими концами в горизонтальном положении. Посередине пружины закреплён маленький шарик массой  $m$  (рис.31). Шарик смещают поперек пружины на 1 см и отпускают. Период поперечных колебаний шарика  $T_1$  оказался равным 2 с. Чему будет равен

период колебаний  $T_2$ , если начальное смещение будет 2 см? Силу тяжести не учитывать и считать, что длина пружины много больше поперечных смещений шарика.

**У78\*.** Один конец легкой слабой пружины в нерастянутом состоянии шарнирно закреплен в точке  $O$ , ко второму концу пружины прикреплен шарик массой  $m$ . Шарик с пружинной приводят в горизонтальное положение и отпускают (рис.32). Чему равна длина пружины в тот момент, когда она проходит вертикальное положение? Жесткость пружины  $k$ , длина свободной пружины  $L$ . Слабость пружины означает, что  $mg \gg kL$ .

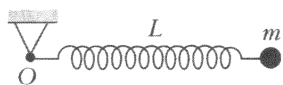


Рис. 32

**У79\*.** Тяжелое тело массой  $m$  висит на гибкой нити в железнодорожном вагоне, который движется со скоростью  $v_0$  на треке испытания безопасности поездов, как показано на рисунке 33. Сильным постоянным торможением вагон останавливают. Может ли груз оказаться при этом в противоположном относительно точки подвеса положении при натянутой нити?

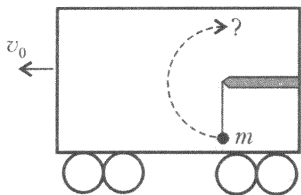


Рис. 33

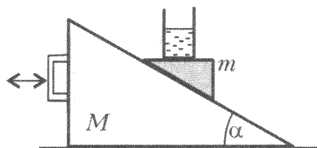


Рис. 34

**У80\*\*.** Стакан, частично заполненный водой, прикреплен к клину, который скользит без трения по склону горки (рис.34). Дно стакана горизонтально, так как углы наклона горки и клина одинаковы и равны  $\alpha$ . Масса горки  $M$ , суммарная масса клина, стакана и воды  $m$ . Какой угол будет составлять поверхность воды с наклонной плоскостью если:

- горка неподвижна;
- горка может двигаться свободно в горизонтальном направлении?

Исследуйте также случай, когда  $m \gg M$ . А что случится, если при помощи ручки привести горку в колебательное движение, но так, чтобы клин не слетел с горки в ее высшей точке?

**У81\*\*.** Представим себе, что кто-то наткнулся на свободную неподвижную веревку, тянущуюся вертикально в небо и свисающую вниз почти до земли. Должен ли этот человек рассматривать такое событие как доказательство существования НЛО или этому можно дать «земное» объяснение в соответствии с извест-

ными законами физики? Какой может быть длина такой веревки?

**У82.** Мост в форме выпуклой параболы перекинут через реку шириной 100 м (рис.35). Самая высокая точка моста находится выше уровня берегов на 5 м. Автомобиль массой 1000 кг

движется по мосту с постоянной скоростью 20 м/с. Найдите силу, с которой автомобиль давит на мост, когда он:

- находится в самой высокой точке моста;
- прошел три четверти длины моста.

Сопротивлением воздуха пренебречь и считать ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

**У83.** Материальная точка массой 0,5 кг перемещается с постоянной скоростью 5 м/с по эллиптическому треку. Когда точка находится на конце большой оси эллипса, на нее действует сила 10 Н, когда на конце малой оси – всего лишь 1,25 Н. Каковы длины осей эллипса?

**У84\*.** Лодочник отправляется из точки *A* на одном берегу прямого канала и движется к другому берегу, держа курс всегда на точку *B*, противоположную точке отправления. Скорость воды в канале в любом месте равна  $v$ . Лодочник, работая веслами равномерно, обеспечивает такую скорость лодки, чтобы в отсутствие течения воды она была равна  $v$ . Как далеко от точки *B* вниз по течению вода унесет лодку? По какой траектории относительно берега плывет лодка?

**У85\*\*.** Мальчик и девочка стоят на наклонной стороне холма, которую можно рассматривать как наклонную плоскость. Земля покрыта льдом. Условия таковы, что при небольшом толчке вниз ребенок будет соскальзывать со склона с постоянной скоростью. Для забавы девочка, прислонившись к дереву, толкает мальчика с начальной горизонтальной (поперек склона) скоростью  $v_0 = 1 \text{ м/с}$  (рис.36). Мальчик скользит по склону со скоростью, которая изменяется по величине и направлению. Какова будет конечная скорость мальчика, если сила трения не зависит от скорости, а сопротивление воздуха отсутствует?

**У86\*.** На берегу находятся пункты *A* и *B*, удаленные на расстояние  $L$  друг от друга. Контрабандисты отправляются на судне в открытое море из пункта *A* перпендикулярно берегу с

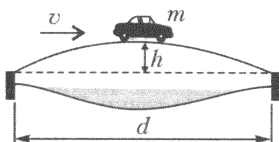


Рис. 35

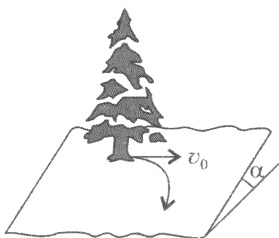


Рис. 36

постоянной скоростью  $v$ . Офицер береговой охраны, обнаружив нарушителей с помощью прибора ночного видения в момент отчаливания их судна, тотчас устремляется за ними в погоню на катере из точки  $B$ . Катер всегда держит курс на нарушителей и, перемещаясь с постоянной скоростью, настигает судно на расстоянии  $L$  от берега. Во сколько раз скорость катера береговой службы больше скорости судна контрабандистов?

**У87.** В начальный момент времени материальные точки массой  $m$  находятся в покое в углах правильного  $n$ -угольника. На рисунке 37 показана ситуация для  $n = 6$ . Каким образом будут

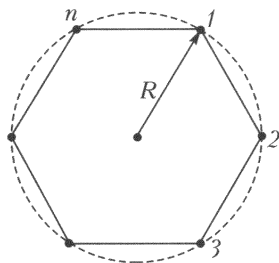


Рис. 37

двигаться точки, если между ними действуют только силы тяготения? Через какое время они столкнутся, если  $n = 2$ , 3 и 10? Исследуйте случай, когда  $n \gg 1$  и  $m = M/n$ , где  $M$  – суммарная масса всех материальных точек.

**У88.** Ракета возвращается к планете таким образом, что ее вектор скорости параллелен вектору скорости при запуске. Угол между радиусами, проведенными из центра планеты к пунктам запуска и прибытия, равен  $\theta$ . Считайте планету сферической радиусом  $R$ . Как долго продолжался полет ракеты, если период обращения спутника, летящего вокруг планеты прямо над ее поверхностью, равен  $T$ ? Чему равно максимальное удаление ракеты от поверхности планеты? Применим ли ваш анализ к крайнему случаю, когда  $\theta \rightarrow 0$ .

**У89\*\*.** Два одинаковых маленьких магнита, с дипольным магнитным моментом  $\mu$  каждый, приклеены к концам  $C$  и  $D$  деревянного бруска длиной  $L$  (рис.38). Ориентации их таковы, что в точке  $C$  магнитик параллелен бруску, а в точке  $D$  – перпендикулярен ему.

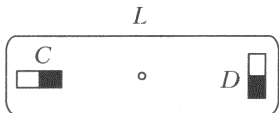


Рис. 38

а) Покажите, что воздействия одного магнита на другой не равны и не противоположны друг другу.

б) Пренебрегая воздействием геомагнитного поля, объясните количественно, что случится, если систему свободно подвесить в ее центре тяжести.

**У90.** Малое тело массой  $m$  и зарядом  $q$  удерживают в покое на небольшом расстоянии  $d$  от неподвижной металлической плоскости. Сколько времени потребуется, чтобы тело достигло плоскости, если его отпустить? Силу тяжести не учитывать.



**У91\*.** Пластмассовый шарик диаметром 1 см с равномерно распределенным зарядом  $10^{-8}$  Кл подвешен на диэлектрической нити так, что его нижняя точка отстоит от поверхности морской воды на расстояние 1 см. В результате поверхность воды немного изгибается в сторону заряженного шарика, и вода под шариком приподнимается. На сколько повышается уровень воды непосредственно под шариком? Силы поверхностного натяжения не учитывайте, считайте плотность соленой воды равной  $1000 \text{ кг/м}^3$ .

**У92.** Точечный заряд находится внутри тонкой металлической сферической оболочки, но не в ее центре. Какая электрическая сила действует на заряд?

**У93.** Атомы бора с массовым числом  $A = 10$  и пучок неизвестных частиц сталкиваются на встречных курсах внутри ускорителя ионов, имея одинаковые скорости. Максимальный угол рассеяния атомов бора составляет  $30^\circ$ . Из каких атомов состоит пучок неизвестных частиц? Считать, что скорости всех частиц много меньше скорости света.

**У94.** Бильярдный шар катится без проскальзывания и ударяет точно такой же неподвижный шар. Считая удар центральным и абсолютно упругим, опишите движение шаров после столкновения. Докажите, что конечные параметры движения не зависят от коэффициента трения скольжения между шарами и бильярдным столом. Трение качения незначительно.

**У95\*.** Наклонная плоскость, составляющая угол  $\alpha$  с горизонтом, оснащена большим количеством одинаковых роликов, расположенных последовательно на расстоянии  $d$  друг от друга (рис.39). Ролики имеют горизонтальные оси и представляют собой покрытые тонким слоем каучука стальные цилиндры массой  $m$  и радиусом  $r$ . Доска массой  $M$  и длиной  $L \gg d$  пущена сверху по роликам без начальной скорости. Найдите конечную скорость доски. Соппротивлением воздуха и трением в подшипниках пренебречь.

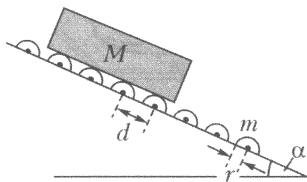


Рис. 39

**У96.** Стальной шар лежит на столе, покрытом скатертью (рис.40). Если скатерть выдернуть из-под шара, то трение заставит шар прийти в движение с вращением. Какова будет скорость шара на столе, когда

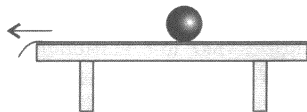


Рис. 40

он будет катиться без проскальзывания? Считайте стол насколько большим, что шар с него не падает.

**У97\*.** Если бы автомобильное движение в Великобритании стало правосторонним (вместо левостороннего), то увеличилась бы тогда продолжительность суток, уменьшилась или осталась неизменной?

**У98.** В физическом трюке два шара, маленький радиусом  $r$  и большой радиусом  $R = 2r$ , находясь на тележке, катятся без проскальзывания таким образом, что прямая линия, соединяющая центры шаров, долгое время составляет угол  $\varphi = 60^\circ$  с горизонтом, если на тележку действовать некоторой горизонтальной силой  $F$  (рис.41).

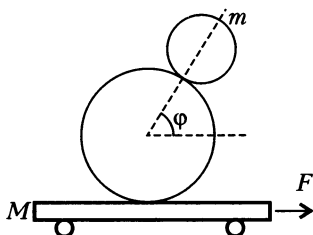


Рис. 41

а) Найдите величину силы  $F$ .

б) Через какое время шары упадут с тележки?

Считать, что шары изготовлены из одного материала, длина тележки  $L = 2$  м, ее масса  $M = 6$  кг, масса меньшего шара  $m = 1$  кг. Вначале шары находились посередине тележки.

**У99\*\*.** В центре горизонтального стола вырезали диск радиусом  $R$ , после чего его возвратили на прежнее место с возможностью свободного вращения вокруг вертикальной оси,

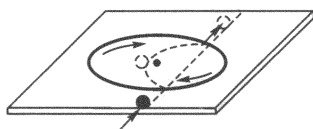


Рис. 42

как показано на рисунке 42 (подобное устройство можно увидеть в Музее науки в Канберре, Австралия). Диск начинает вращаться, а твердый резиновый шар катится по столу в сторону диска по прямой. Когда шар

попадает на вращающийся диск, траектория его становится криволинейной. Когда же он покидает диск, то продолжает катиться без проскальзывания по той же прямой линии, при этом конечная скорость шара та же самая, что была на подходе к диску. Объясните, какие законы определяют такое движение.

**У100.** Тонкое кольцо радиусом  $R$  сделано из материала с плотностью  $\rho$  и модулем Юнга  $E$ . На сколько изменится длина окружности кольца, если его закрутить вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно плоскости кольца с угловой скоростью  $\omega$ ? Изменения длины считать малыми.

**У101\*.** Легкая неупругая веревка опоясывает по полуокружности неподвижный цилиндр, как показано на рисунке 43. Из-за трения веревка не скользит по цилиндру, когда величины сил,

действующих на ее концах, удовлетворяют неравенству  $F_A/2 \leq F_B \leq 2F_A$ . Определите коэффициент трения между веревкой и цилиндром.

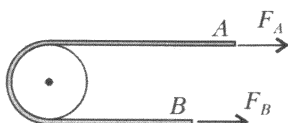


Рис. 43

**У102\*\*.** Чарли, студент-первокурсник университета, изучает интегральное исчисление. В качестве упражнения он должен определить положение центра масс  $C$  полуокружности, которая имеет радиус  $R$  и однородное распределение масс (рис. 44). Его младшая сестра Дженни еще учится в средней школе и по физике изучает вращение твердых тел. Дженни наблюдает за вычислениями своего брата, но поскольку она никогда не слышала об интегральном исчислении, то многого не понимает из того, что он делает. Единственно, что она понимает, это физический смысл задачи. После размышлений и вычислений в течение некоторого времени, она говорит: «Я получила результат и могу определить положение центра масс не только полуокружности, но также любой части окружности или даже любого кругового сектора».

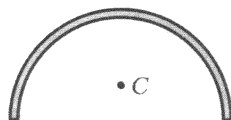


Рис. 44

Как Дженни это сделала?

**У103\*.** Стол высотой 1 м имеет посередине отверстие (рис. 45). Тонкая золотая цепочка длиной 1 м свободно лежит вокруг отверстия, как показано на рисунке. Один конец цепочки тихонько толкнули в отверстие. Трение незначительно, в результате чего цепочка проскальзывает через отверстие с увеличивающейся скоростью. Сколько времени пройдет, прежде чем второй конец цепочки окажется на полу?

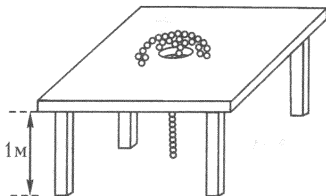


Рис. 45

**У104\*.** Гибкая однородная тяжелая цепь плотно огибает два горизонтальных цилиндра так, что ее форма напоминает беговую дорожку стадиона, т.е. она состоит из двух полуокружностей, соединенных двумя прямыми участками (рис. 46). Цилиндры привели во вращение, и звенья цепи стали двигаться со скоростью  $v$ . По некоторым причинам цепь внезапно соскальзывает с цилиндров и падает вертикально. Как будет изменяться форма цепи во время падения?

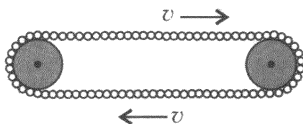


Рис. 46

По словам Стива, цепь примет круговую форму из-за центробежной силы. Боб принимает эту точку зрения, но полагает, что первоначально «эллиптическая» цепь потеряет круговую форму под этим же воздействием и станет вертикальным эллипсом с новой большой осью, расположенной под прямым углом к первоначальной. Он ожидает, что этот процесс будет повторяться и что форма цепи между двумя эллипсами будет круговой. Фрэнк предполагает, что цепь сохранит первоначальную форму, но он не может дать никаких объяснений своему предположению.

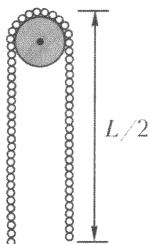


Рис. 47

Кто прав? Или, возможно, они все неправы?

**У105\*\*.** Тяжелая гибкая и неупругая цепь длиной  $L$  висит почти симметрично на легком шкиве, который может вращаться относительно неподвижной горизонтальной оси, как показано на рисунке 47. Чему равна скорость цепи в момент, когда она покидает шкив?

**У106\*.** Длинная тяжелая и гибкая веревка с массой  $\rho$  на единицу длины натянута с постоянной силой  $F$ . Внезапное движение формирует круглую петлю на одном конце веревки (подобным способом образуются поперечные волны), и петля бежит по веревке со скоростью  $c$ , как показано на рисунке 48.

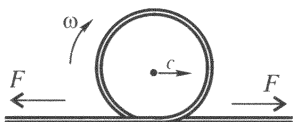


Рис. 48

а) Вычислите скорость  $c$  петли.

б) Определите энергию, импульс и момент импульса петли, если угловая частота вращения равна  $\omega$ . Какова связь между этими величинами?

**У107.** Горизонтальная лента конвейера, движущаяся со скоростью  $1 \text{ м/с}$ , загружается песком, который падает вертикально (рис.49). Расход песка составляет  $50 \text{ кг/с}$ . Какова минимальная выходная мощность двигателя, вращающего ленту конвейера? Как рассчитать работу, произведенную двигателем по ускорению песка?

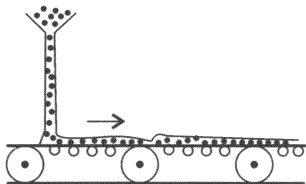


Рис. 49

**У108\*.** Пожарный шланг массой  $M$  и длиной  $L$  смотан в рулон радиусом  $R$ ,  $R \ll L$  (рис. 50). Рулону

придали начальную скорость  $v_0$  (угловая скорость  $v_0/R$ ), в то время как свободный конец шланга удерживают неподвижно. Шланг разворачивается и становится прямым.

а) Сколько времени потребуется, чтобы шланг полностью развернулся?

б) Скорость рулона непрерывно увеличивается, и его ускорение имеет то же направление, что и скорость. С другой стороны, вектор результирующей горизонтальных внешних сил

(силы трения в сумме с ограничивающей силой на неподвижном конце шланга) указывает на противоположное направление. Как эти два факта совместимы со вторым законом Ньютона?

Чтобы упростить анализ, предположите, что начальная кинетическая энергия рулона намного больше, чем его потенциальная энергия (считайте, что  $v_0 \gg \sqrt{gR}$ ). Считайте, что шланг идеально гибкий и что работой, необходимой для его деформации, сопротивлением воздуха и трением качения можно пренебречь.

**У109.** Где ускорение свободного падения больше: на поверхности Земли или на глубине 100 км? Считайте Землю сферически симметричной. Средняя плотность Земли  $\rho_3 = 5500 \text{ кг/м}^3$ , плотность земной коры  $\rho_k = 3000 \text{ кг/м}^3$ . (Можно считать, что толщина коры по крайней мере не меньше 100 км.)

**У110\*.** Институт исследования космических аварий послал следующее короткое сообщение одному из своих экспертов:

Космический корабль маленьких зеленых человечков, питающихся титаном, нашел сферический астероид. Узкая испытательная шахта была просверлена от точки на его поверхности к центру  $O$  астероида (рис.51, слева). Подтвердилось, что весь астероид сделан из однородного титана. В этот момент произошла трагедия – один из маленьких зеленых человечков упал в испытательную шахту. Он падал без препятствий, пока не достиг точки  $O$ , где погиб от столкновения с дном шахты. Однако маленькие зеленые человечки продолжили работу и начали секретные раскопки титана, в ходе которых они сформировали сферическую пещеру диаметром  $AO$  внутри астероида, как показано на рисунке справа. Но тут произошла вторая трагедия – другой маленький зеленый человечек упал в точке  $A$  и летел до точки  $O$ , где и погиб.

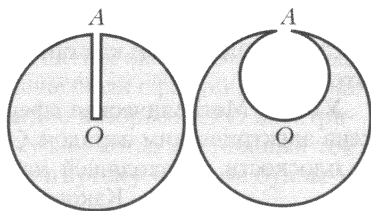


Рис. 51

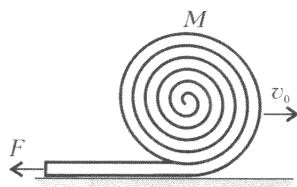


Рис. 50

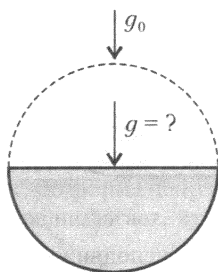


Рис. 52

Институт попросил эксперта вычислить отношение скоростей в точке  $O$  и отношение времен, затрачиваемых на падение от  $A$  до  $O$  двумя несчастными маленькими человечками. Какие цифры привел эксперт в своем ответе?

**У111\*.** Зеленые человечки из предыдущей задачи, питающиеся титаном, продолжили свои раскопки. В результате их разрушительного действия на окружающую среду половина астероида была скоро раскопана, и, как показано на рисунке 52, осталось только одно правильное полушарие. Выкопанный материал был унесен с астероида. Каково ускорение  $g$  свободного падения в центре плоской поверхности оставшегося полушария, если ускорение свободного падения на поверхности исходного (шарообразного) астероида было равно  $g_0 = 9,81 \text{ см/с}^2$ ?

**У112\*.** Маленькие зеленые человечки, питающиеся титаном, нашли другой астероид из титана — радиусом 10 км и с однородным распределением массы. Они начали выкапывать и передавать материал астероида к поверхности. Раскопки металла производились с помощью высверленных шахт в виде полос шириной 1 м по всему экватору астероида, пока они не разрезали астероид полностью на две части. Тогда случилась авария: опоры, отделяющие эти два полушария, сломались, и астероид разрушился.

Эксперты от Института исследования космических аварий должны вычислить полную силу, действующую на опоры непосредственно перед тем как они разрушились. Пожалуйста, помогите им.

**У113\*.** Металлическая сфера радиусом  $R$  равномерно заряжена электрическим зарядом  $Q$ . Сферу разрезают на две части по плоскости, проходящей на расстоянии  $h$  от центра сферы.

Какова сила, необходимая для удержания обеих частей сферы вместе?

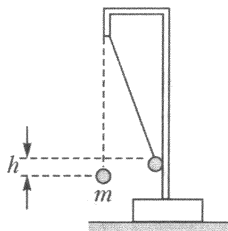


Рис. 53

**У114.** Маленький положительно заряженный шарик массой  $m$  подвешен на тонкой диэлектрической нити. Другой положительно заряженный маленький шарик очень медленно перемещают издалека до тех пор, пока он не достигнет первоначального положения первого шарика (рис.53). Чему равна совершенная работа?

та, если первый шарик поднимается при этом на небольшую высоту  $h$ ?

**У115\*\*.** Водород, находящийся под высоким давлением в небольшом сферическом контейнере, используется для заполнения легкого воздушного шара, где его давление становится равным атмосферному. Может ли этот воздушный шар поднять контейнер? Предположите, что температура газа остается постоянной.

**У116.** В древние времена люди думали, что Земля плоская. Вообразите, что Земля действительно не шар радиусом  $R$ , а бесконечная пластина толщиной  $H$ . При каком значении  $H$  ускорение свободного падения в этой модели не будет отличаться от ускорения свободного падения на поверхности сферической Земли? Считайте, что плотность земных пород не зависит от глубины залегания и в обеих моделях одинакова.

**У117\*.** Электрические заряды равномерно распределены по длинному тонкому изолированному стержню  $AB$  (рис.54). Покажите, что в произвольной точке  $C$  электрическое поле стержня  $E$  направлено по биссектрисе угла  $ACB$ .

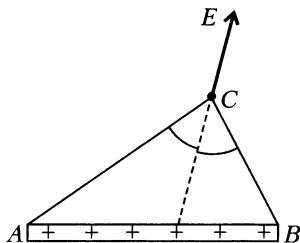


Рис. 54

**У118.** Используя результат предыдущей задачи, определите направление и величину напряженности электрического поля в плоскости, которая перпендикулярна длинному заряженному стержню и содержит одну из конечных точек стержня.

**У119.** В начале девятнадцатого столетия экспериментальные и теоретические исследования в физике были сфокусированы на изучении магнитного поля проводов, по которым текут электрические токи. Особенно интересен случай, когда постоянный ток  $I$  идет по очень длинному проводу, согнутому в форме буквы V с углом  $2\theta$  (рис.55). Согласно вычислениям Ампера, величина  $B$  магнитного поля около точки  $P$ , находящейся вне V-образного провода, но на его оси симметрии и на расстоянии  $d$  от его вершины, пропорциональна  $\text{tg}(\theta/2)$ . Для той же самой ситуации

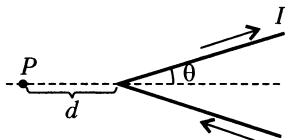


Рис. 55

Био и Савар предположили, что магнитное поле в точке  $P$  могло бы быть пропорционально  $\theta$ . Фактически, они попытались выбрать одно из этих двух предположений, измеряя период

колебаний магнитной стрелки как функцию угла V-образного провода. Однако для диапазона выбранных значений  $\theta$  предсказанные различия оказались слишком малыми, чтобы быть измеренными.

а) Какая формула могла бы быть правильной?

б) Найдите коэффициент пропорциональности в этой правильной формуле и оцените наиболее вероятный эффект, появляющийся в другой формуле.

**У120\*\*.** Постоянный ток течет в соленоиде длиной  $L$  и радиусом  $R$  ( $L \gg R$ ), создавая внутри соленоида магнитное поле индукцией  $B_0$  (рис.56).

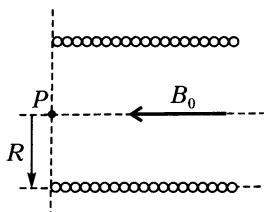


Рис. 56

а) Какова индукция магнитного поля в центре торца катушки, т.е. в точке  $P$ , указанной на рисунке?

б) Чему равен магнитный поток через торец катушки, т.е. через круг радиусом  $R$  с центром в точке  $P$ ?

в) Сделайте набросок картины линий магнитного поля около точки  $P$ .

**У121.** По внутренним поверхностям двух близко расположенных диэлектрических параллельных пластин площадью  $S$  равномерно распределен заряд  $+Q$ . Какая сила потребуется, чтобы удерживать эти пластины на прежнем расстоянии?

**У122.** Два плоских конденсатора  $AB$  и  $CD$  изготовлены из одинаковых тонких металлических пластин, но расстояние между пластинами разное: 5 мм для конденсатора  $AB$  и 2 мм для  $CD$ . Конденсатор  $AB$  имеет емкость 20 пФ. Пластины  $A$  и  $C$  заряжены положительно, а пластины  $B$  и  $D$  отрицательно, величина заряда равна 1 нКл. Каковы будут разности потенциалов  $U_{AB}$  и  $U_{CD}$  после того, как конденсатор  $CD$  расположили симметрично внутри конденсатора  $AB$ ? Что изменится, если симметрия будет нарушена?

**У123\*.** Расстояние между пластинами плоского конденсатора  $d$ , площадь каждой пластины  $S$  (рис.57). Обе пластины заземлены. Какой заряд окажется на каждой пластине, если между ними на расстоянии  $x$  от одной из них ввести точечный заряд  $Q$ ?

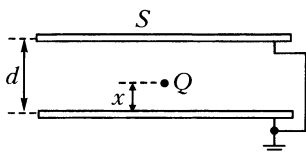
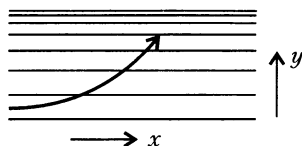


Рис. 57

**У124\*.** Электрический диполь с дипольным моментом  $p$  помещен между заземленными пластинами плоского конденсатора на расстоянии  $x$  от одной из них. Дипольный



момент диполя перпендикулярен пластинам. Как заряд, который появляется на каждой из пластин конденсатора, зависит от  $x$ ? Краевыми эффектами пренебречь.



**У125\*.** Показатель преломления среды в пределах некоторой области

Рис. 58

$x > 0$ ,  $y > 0$ , зависит от  $y$ . Тонкий луч света попадает в среду в направлении  $x$  и распространяется в ней по дуге окружности (рис.58). Как показатель преломления зависит от  $y$ ? Каков максимально возможный угловой размер дуги?

**У126.** Компакт-диск (CD) содержит приблизительно 650 мегабайт информации. Чему равен размер области, содержащей единицу информации, т.е. один бит? Оцените этот размер с помощью обычной линейки. Подтвердите вашу оценку, используя лазерный луч.

**У127.** При нормальном падении света на дифракционную решетку (300 штрихов на 1 мм) было обнаружено, что дифракционная линия, видимая под углом  $24,46^\circ$ , содержит красную (640–750 нм) и сине-фиолетовую (360–490 нм) компоненты. Можно ли наблюдать то же самое под другими углами?

**У128\*.** Параллельный тонкий монохроматический лазерный пучок падает нормально на дифракционную решетку. Как изменяется дифракционная картина на экране при повороте решетки на угол  $\varphi$  ( $\varphi < 90^\circ$ ) вокруг оси, которая

- параллельна линиям решетки;
- перпендикулярна линиям решетки?

**У129.** Два тела, плавающих в жидкости, притягиваются друг к другу в результате поверхностного натяжения, независимо от того, плавают ли они в воде или в ртути. Объясните, почему это так.

**У130\*.** Вода в чистом аквариуме на границе со стеклом образует мениск, как показано на рисунке 59. Вычислите высоту  $h$  подъема края мениска над основной поверхностью. Коэффициент поверхностного натяжения воды  $\sigma = 0,073$  Н/м.

**У131\*.** Может ли существовать сферическая капля воды, которая испаряется без поглощения тепла или потери внутренней (тепловой) энергии, а только за счет поверхностной энергии?

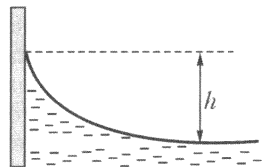


Рис. 59

**У132\*\*.** Маленькие капли жидкости различных размеров находятся в закрытом сосуде, стенки которого не смачиваются

этой жидкостью. В течение достаточно длительного времени размер самых маленьких капель уменьшается, в то время как у больших он увеличивается, и, наконец, в сосуде остается только одна большая капля. Как объяснить такое явление?

**У133.** Горизонтальный поршень с малым трением, незначительными массой и теплоемкостью делит вертикальный изолированный цилиндр на две половины. Каждая половина цилиндра содержит 1 моль воздуха при нормальных температуре и давлении. К поршню подвешивают груз массой  $m$ , как показано на рисунке 60. Груз тянет поршень вниз и после нескольких колебаний останавливается в состоянии покоя. На сколько изменится объем воздуха в нижней части цилиндра после установления равновесия? Считать массу груза очень большой.

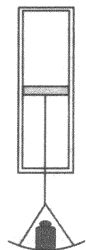


Рис. 60

**У134\*.** Какой высоты могла бы быть самая высокая гора на Земле? А на Марсе?

**У135\*\*.** Запаянная снизу стеклянная пробирка длиной 152 см удерживается в вертикальном положении. Верхняя половина пробирки заполнена ртутью, нижняя – воздухом. Воздух медленно нагревают. Какое количество теплоты необходимо передать воздуху, чтобы всю ртуть вытеснить из пробирки? Изобразите на графике, как изменяется молярная теплоемкость воздуха в течение этого процесса. Атмосферное давление  $p_0 = 760$  мм рт.ст.

**У136.** Извержение вулкана – обычное явление в Исландии. Как известно, ледники занимают около 11% площади этого острова, поэтому вулканические извержения весьма часто происходят под ледниками. Так, в октябре 1996 года такое извержение произошло под ледником Ватнайокул, самым большим ледником Европы. В месте извержения ледник был ровный и гладкий толщиной 500 м. В результате извержения, длившегося целый день, образовалась глубокая впадина на нижней поверхности ледника в форме перевернутого конуса глубиной 100 м и диаметром 1 км. Объясните, как образовалось это углубление. Что могло бы быть найдено под ледяным кратером в это время? Попробуйте предсказать последующие события.

**У137\*.** Самый известный гейзер в Йеллоустонском национальном парке – это «Старый Дух». Через каждые 90 минут гейзер «оживает» и в течение четырех минут выбрасывает около 44 тонн пара. Модель этого гейзера можно представить следующим образом (рис.61). Глубоко под землей имеется огромная полость, сообщающаяся с атмосферой при помощи узкого вертикального канала. В спокойном состоянии полость и канал

заполнены водой. Окружающая горячая земля, благодаря остаточному вулканическому действию, нагревает воду в емкости. В результате вскипания вода в канале частично превращается в пар и вместе с остатками воды выбрасывается в атмосферу. После извержения подземные ручьи наполняют полость и канал до исходного уровня за 20–30 минут. Опять начинается

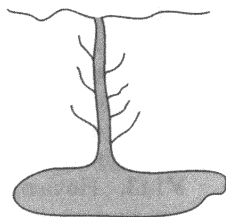


Рис. 61

нагрев и т.д. Геологические эксперименты показывают, что подземная температура в этой области увеличивается на 1 К с каждым метром глубины. Определите минимальное расстояние, на котором под поверхностью находится полость. Если считать, что полость расположена на минимально возможной глубине, то каков ее объем?

**У138.** Воздух над большим озером имеет температуру  $-2\text{ }^{\circ}\text{C}$ , в то время как температура воды в озере  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Предполагая, что важен только процесс теплопроводности, оцените время, за которое на поверхности озера может образоваться лед толщиной 10 см. В расчетах используйте следующие данные:

коэффициент теплопроводности воды  $\lambda_{\text{в}} = 0,56\text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ ,

коэффициент теплопроводности льда  $\lambda_{\text{л}} = 2,3\text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ ,

удельная теплота плавления льда  $L = 3,3 \cdot 10^5\text{ Дж}/\text{кг}$ ,

плотность воды  $\rho_{\text{в}} = 1000\text{ кг}/\text{м}^3$ ,

плотность льда  $\rho_{\text{л}} = 920\text{ кг}/\text{м}^3$ .

**У139.** Если на размораживание индейки массой 5 кг в естественных условиях требуется два дня, то сколько времени потребуется, чтобы разморозить 8-тонного сибирского мамонта?

**У140\*.** Кусок льда массой 0,6 кг находится в большом закрытом контейнере. Объем пустого контейнера равен  $1\text{ м}^3$ . В исходном состоянии температуры льда и контейнера равны  $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Температуру контейнера стали увеличивать и довели ее до  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ . На сколько большее количество теплоты требуется в этом случае, чем в случае нагрева пустого контейнера до той же температуры?

**У141\*.** Контейнер с прочными стенками наполовину заполнен водой. Другая половина содержит воздух, температура и давление которого первоначально нормальные. Контейнер закрывают и медленно нагревают. Когда закипит вода в контейнере? В каком(их) состоянии(ях) находится вода при повышении температуры?

**У142.** В закрытом стеклянном сосуде при температуре  $T$  натянута две паутинки  $A$  и  $B$  длиной  $L$  каждая. Силы натяжения паутинки одинаковы и равны  $F$ . Паутинки подвергаются ударам молекул воздуха, и в них возникают случайные колебания. Каково отношение амплитуд этих колебаний, если паутинка  $A$  имеет вдвое большую массу, чем паутинка  $B$ ?

**У143.** Ночью на открытом воздухе водяные пары часто конденсируются на паутинах, на которых можно увидеть очень маленькие одинаковые периодически расположенные водяные капли. Найдите минимальное расстояние между этими каплями.

**У144\*.** Представьте себе цилиндрическое тело, которое может двигаться без трения по прямому проводу, параллельному его оси симметрии, как показано на рисунке 62. Крошечные частицы, перемещающиеся горизонтально со скоростью  $v_0$ , бомбардируют тело равновероятно слева и справа. Столкновения с правым торцом цилиндра абсолютно упругие, в то время как с левым — абсолютно неупругие, хотя частицы и не прилипают к цилиндру после столкновения. Какова скорость цилиндра:

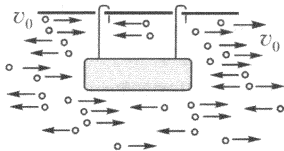


Рис. 62

- а) спустя длительное время;
- б) спустя очень длительное время?

**У145.** Абсолютно черный сферический зонд находится очень далеко от Солнечной системы. В результате нагрева изнутри источником ядерной энергии с плотностью  $I$  поверхностная температура зонда стала равна  $T$ . Теперь зонд закрепили внутри тонкого теплового экрана, абсолютно черного с обеих сторон, при помощи теплоизолирующих стержней (рис.63). Найдите новую температуру поверхности зонда. Определите также поверхностную температуру, которая возникла бы при использовании  $N$  таких экранов.

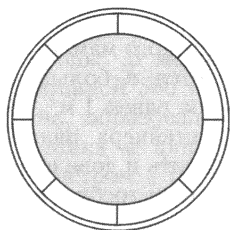


Рис. 63

**У146\*.** Два теплоизолированных контейнера содержат одинаковые массы воды. В одном из них вода имеет температуру  $T_1$ , в другом  $T_2$  ( $T_2 > T_1$ ). Какова максимальная работа, которую эта система может произвести, если она используется как тепловой двигатель? Считайте, что удельная теплоемкость воды постоянна во время всего периода работы.

**У147.** При нормальных условиях в одной части сосуда находятся два моля гелия, в другой — три моля кислорода.

Сосуды разделены перегородкой. Как изменится энтропия системы, если убрать перегородку?

**У148.** При помощи поршневого насоса доводят давление воздуха в 10-литровом баллоне до десяти атмосфер. Какая работа при этом совершается, если за один цикл насос прокачивает 1 литр воздуха? Стенки баллона и насоса хорошо проводят тепло, так что температуру можно считать постоянной.

**У149.** Отдаленная планета обладает очень высоким электрическим потенциалом по сравнению с Землей. Металлический космический корабль послан с Земли с целью приземления на этой планете. Опасна ли эта миссия? Что может случиться, когда астронавты откроют люк космического корабля и шагнут на поверхность планеты?

**У150.** На сколько процентов изменилась емкость сферического конденсатора, если при равномерном вдавливании (рис.64) его объем уменьшился на 3%?

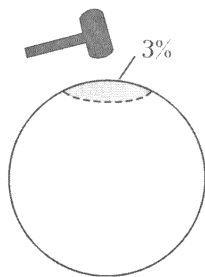


Рис. 64

**У151\*.** Уединенное замкнутое тело, поверхность  $S$  которого сделана из металлической фольги, имеет электрическую емкость  $C$ . Фольга сдавливается таким образом, что новая поверхность  $S^*$  полностью оказывается внутри первоначальной поверхности, как показано на рисунке 65. Докажите, что электрическая емкость деформированного тела меньше  $C$ .

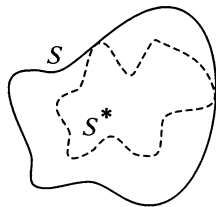


Рис. 65

**У152.** Пластины плоского конденсатора подсоединены к батарее с ЭДС  $\mathcal{E}$ . Площадь каждой пластины  $S$ , расстояние между ними  $d$ . Какую надо совершить работу, чтобы раздвинуть пластины конденсатора до расстояния  $2d$ ? Как изменяется энергия конденсатора в течение этого процесса?

**У153\*.** Как изменится длина спиральной пружины, если через нее пропустить ток  $I_0$ ? Параметры пружины (рис.66): жесткость  $k$ , начальная длина  $x_0$ , число витков  $N$ , радиус витков  $R$ .

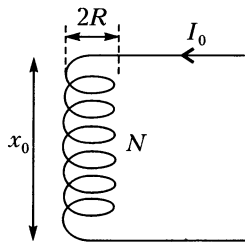


Рис. 66

**У154\*.** Очень короткий магнит  $A$  массой  $m$  подвешен на нити длиной  $l = 1$  м в горизонтальном положении. Другой такой же магнит  $B$  медленно подносят к магниту  $A$  таким образом, что оси магни-

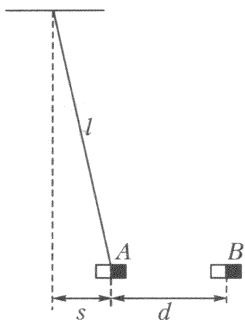


Рис. 67

тов всегда находятся на одном и том же горизонтальном уровне (рис.67). Когда расстояние  $d$  между магнитами равно 4 см, а магнит  $A$  сместился по горизонтали на расстояние  $s = 1$  см, он самостоятельно начинает двигаться в сторону магнита  $B$ .

а) Зависимость силы взаимодействия между магнитами от расстояния определяется выражением  $F_m(x) = \pm K/x^n$ , причем знак зависит от относительной ориентации полюсов магнитов. Используя данные задачи, найдите значение показателя степени  $n$ .

б) Магнит  $B$  помещают на дно стеклянной трубки, расположенной вертикально и запаянной снизу. Сверху в трубку медленно опускают магнит  $A$  в такой ориентации, что магниты отталкиваются друг от друга. Внутренний диаметр трубки чуть больше поперечных размеров магнитов и не позволяет им изменять свои ориентации. Найдите расстояние между магнитами в положении равновесия.

**У155.** Электрическая батарея состоит из  $N$  одинаковых элементов, соединенных последовательно. ЭДС каждого элемента равна  $\mathcal{E}$ . Является ли справедливым утверждение, что энергию, расходуемую при использовании батареи для зарядки конденсатора до полного напряжения батареи через резистор, можно уменьшить, если зарядку производить в  $N$  стадий, т.е. подсоединить конденсатор сначала к одному элементу, затем к двум элементам, затем к трем элементам и т.д. до  $N$  элементов, а не сразу к целой батарее в одну стадию?

**У156.** Устройство, производящее электрическую энергию, состоит из конденсатора с плоскопараллельными пластинами. Почти все пространство между пластинами заполнено маслом с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon > 1$ . Вычислите накопленную в конденсаторе энергию, если его пластинам сообщают заряды  $\pm Q$ . После этого масло, которое не входит в прямой контакт с пластинами, выливают. Вычислите энергию конденсатора в этом случае и покажите, что она увеличилась. Каким образом это произошло?

**У157.** Непроводящая пластина с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  медленно скользит между параллельными пластинами конденсатора, полностью заполняя пространство между ними. Какая сила действует на пластину, если в течение процесса:

а) заряд на пластинах конденсатора постоянен;

б) напряжение на конденсаторе постоянно?

Как диэлектрическая пластина влияет на энергию конденсатора в случаях а) и б)?

**У158.** Каждый резистор в цепи, изображенной на рисунке 68, имеет сопротивление 1 Ом. Через резистор, расположенный

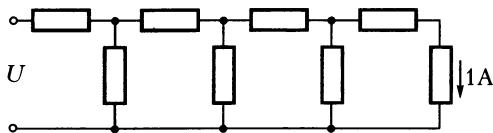


Рис. 68

справа, течет ток 1 А. Какова разность потенциалов  $U$  на входных клеммах цепи? Каково эквивалентное сопротивление цепи? Как изменится эквивалентное сопротивление цепи, если к ней подсоединить еще один или два резистора? Сравните этот результат с эквивалентным сопротивлением бесконечной цепи.

**У159.** Бесконечная сетка с квадратными ячейками, показанная на рисунке 69, состоит из одинаковых резисторов сопротивлением  $R$ . Каково эквивалентное сопротивление между двумя соседними точками сетки? Какова была бы эквивалентная емкость между двумя соседними точками сетки, если бы сетка состояла из конденсаторов емкостью  $C$ ? Какой была бы соответствующая эквивалентная индуктивность, если бы сетка состояла из катушек индуктивностью  $L$ ?

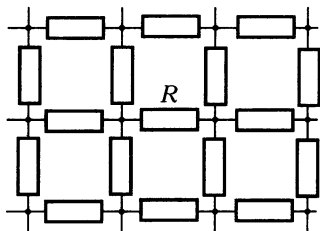


Рис. 69

**У160\*.** Одинаковые резисторы сопротивлением 1 Ом каждый соединены между собой так, что образуют правильный многогранник (куб, тетраэдр, додекаэдр и т.д.). Каково эквивалентное сопротивление между двумя соседними вершинами такого многогранника?

**У161.** Найдите эквивалентные сопротивления сеток, рассмотренных в двух предыдущих задачах, между двумя соседними точками, если резистор, соединяющий эти точки, удален.

**У162\*.** Плоскость делит пространство на две половины. Одна половина заполнена однородной проводящей средой, а на другой половине работают физики. Они рисуют на плоской границе проводящего полупространства контур квадрата со стороной  $a$  и пропускают ток  $I_0$  так, что он входит в одну из вершин квадрата,

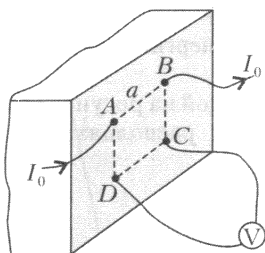


Рис. 70

а из соседней вершины выходит (рис. 70). Одновременно они измеряют при помощи вольтметра напряжение  $U$ , возникающее между двумя другими вершинами. Как, используя эти данные, физики смогут определить удельное сопротивление однородной проводящей среды?

**У163\*.** Вам дают сложную электрическую схему, содержащую много резисторов и других пассивных элементов, и просят экспериментально определить сопротивление одного из резисторов без изъятия его из цепи. Вас обеспечивают высококачественной батареей, амперметром и вольтметром. Как бы вы провели эксперимент?

**У164\*.** Все ребра куба представляют собой резисторы сопротивлением 1 Ом каждый. Каково эквивалентное сопротивление куба между двумя вершинами одной из его пространственных диагоналей? Исследуйте также одно-, двух- и четырехмерный кубы. Найдите общую формулу для случая  $n$ -мерного куба.

**У165.** Два отрезка медного и железного провода одинакового сечения сварили встык (рис. 71). Через такой провод пропускают постоянный ток 1 мА. Какой электрический заряд накапливается на границе между двумя металлами? Скольким элементарным зарядам он соответствует?

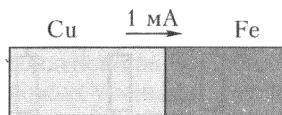


Рис. 71

**У166.** Известно, что геомагнитное поле имеет дипольный характер. На северном полюсе индукция магнитного поля Земли равна  $6 \cdot 10^{-5}$  Тл. Индукция магнитного поля над Лондоном равна  $5 \cdot 10^{-5}$  Тл, а угол склонения составляет  $66^\circ$ . Гигантский реактивный самолет с размахом крыла 80 м, длиной 60 м и толщиной 8 м летит горизонтально со скоростью 720 км/ч. Оцените разность потенциалов, которую можно было бы обнаружить на поверхности реактивного самолета, когда он летит:

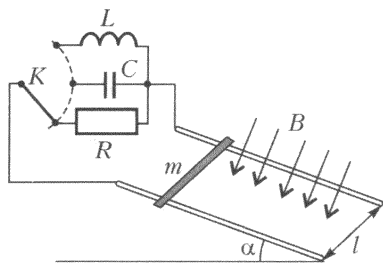
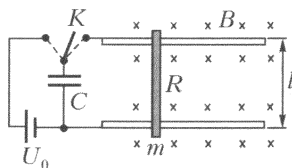


Рис. 72



- а) над северным полюсом;
- б) на север, через экватор;
- в) на восток над экватором;
- г) на северо-запад над Лондоном.

**У167.** Два проводящих рельса образуют наклонную плоскость с углом наклона  $\alpha$  к горизонту (рис.72). Перпендикулярно этой плоскости действует однородное постоянное магнитное поле с индукцией  $B$ . Проводящий стержень массой  $m$  может скользить вниз по рельсам без трения, замыкая их и сохраняя свое горизонтальное положение. Как движется стержень после того, как его отпустили, если цепь, образованная стержнем и рельсами,



- а) резистором сопротивлением  $R$ ;
- б) конденсатором емкостью  $C$ ;
- в) катушкой индуктивностью  $L$ ?

**У168\*.** Пара проводящих рельсов, расстояние между которыми  $l$ , образуют горизонтальную плоскость (рис.73). По нормали к плоскости действует однородное постоянное магнитное поле с индукцией  $B$ . Поперек рельсов лежит проводящий стержень сопротивлением  $R$  и массой  $m$ . Конденсатор емкостью  $C$ , заряженный до напряжения  $U_0$ , подключают к рельсам.

Рис. 73

- а) Определите максимальную скорость стержня.
- б) При каких условиях эффективность (КПД) этого «электромагнитного орудия» будет максимальной?

Трением скольжения, электрическим сопротивлением рельсов и индуктивностью системы пренебречь.

**У169.** Резистор и катушка индуктивности последовательно соединены с батареей через выключатель (рис.74). Сначала цепь разомкнута, а в некоторый момент ключ замыкается.

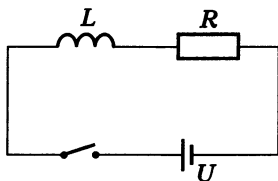


Рис. 74

- а) Чему будет равен ток, когда магнитная энергия в катушке достигнет максимума?
- б) Когда будет наибольшей скорость нарастания джоулева тепла в резисторе?

**У170\*.** а) Нарисуйте качественно график зависимости амплитудного значения тока, который идет от источника в цепях, показанных на рисунках 75 и 76, от  $x = \omega/\omega_0$ , где  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ .

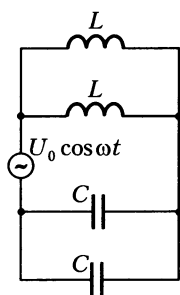


Рис. 75

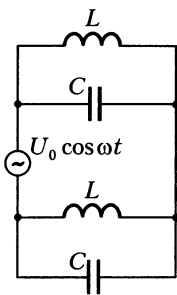


Рис. 76

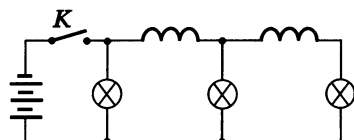


Рис. 77

б) Используя три или больше компонентов, показанных на рисунках, постройте пять новых цепей, в каждой из которых будет наблюдаться резонанс токов на различных частотах (максимальный по амплитуде ток, потребляемый от источника при некоторой частоте).

**У171\*.** Цепь, показанная на рисунке 77, состоит из трех одинаковых ламп и двух одинаковых катушек. В исходном состоянии все лампы горят практически одинаково, так как сопротивление катушек очень мало. Каковы будут относительные яркости ламп сразу после отключения батареи?

**У172.** Витки «объемного» соленоида заполняют все пространство между двумя длинными концентрическими цилиндрами данных диаметров. Ток, протекающий по обмотке соленоида, должен создать заданное магнитное поле на оси цилиндров. Провод какого диаметра – большого или малого – необходимо взять, чтобы минимизировать нагрев обмотки?

**У173\*.** Твердый металлический цилиндр вращается с угловой скоростью  $\omega$  относительно оси симметрии. Цилиндр находится в однородном и параллельном его оси магнитном поле индукцией  $B$ . Каково распределение плотности заряда внутри цилиндра? Существует ли угловая скорость, при которой плотность заряда везде остается равной нулю?

**У174\*.** Рассмотрите результат предыдущей задачи, используя вращающуюся систему отсчета, связанную с цилиндром. Опишите электрические и магнитные поля в этой вращающейся (неинерциальной) системе отсчета. (Считайте, что угловая скорость вращения намного меньше циклотронной частоты  $\omega_0 = eB/m$ , где  $e$  и  $m$  – заряд и масса электрона соответственно.)

**У175\*.** Джек и Джилл должны были решить задачу о распределении заряда в велосипедной спице, когда колесо вращается в однородном магнитном поле, совпадающем по направлению с его осью.

Джилл знает решение задачи 173 и просто использует его.

Пренебрегая массой электрона, она делает вывод, что плотность заряда равна  $\rho = 2\epsilon_0 B\omega$ . Решение Джека основано на том факте, что спица велосипеда – это тонкий металлический стержень. Он рассматривает одномерную задачу и считает, что наведенное в спице электрическое поле зависит от  $r$  так:  $E(r) = rB\omega$ . Затем Джек применяет теорему Гаусса к сечению спицы длиной  $\Delta r$ :  $(\rho/\epsilon_0) S \Delta r = S \Delta E = B\omega S \Delta r$ , где  $S$  – площадь поперечного сечения спицы. Из этого уравнения он получает для плотности заряда такое выражение:  $\rho = \epsilon_0 B\omega$ , что дает значение  $\rho$  в два раза меньшее, чем получила Джилл.

Прокомментируйте эти отличающиеся результаты.

**У176.** Металлическое кольцо диаметром  $2r = 0,2$  м и маленькая магнитная стрелка могут свободно вращаться относительно вертикального диаметра кольца (рис.78). Стрелка находится в центре кольца. Если кольцо не вращается, то магнитная стрелка ориентируется по направлению горизонтальной составляющей магнитного поля Земли. Когда кольцо вращается со скоростью 10 оборотов в секунду, то отклонение стрелки от этого положения составляет в среднем  $2^\circ$ . Чему равно электрическое сопротивление  $R$  кольца?

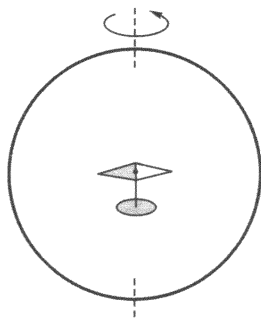


Рис. 78

**У177.** Однородный тонкий провод длиной  $2\pi a$  и сопротивлением  $r$  соединен своими концами так, что образует кольцо. Маленький вольтметр  $V$  сопротивлением  $R$  подсоединен при помощи проводников с незначительным сопротивлением к двум точкам на проводе. Угловое расстояние между точками равно  $\theta$ , как показано на рисунке 79. Кольцо пронизывается по нормали однородным магнитным полем, индукция которого изменяется со скоростью  $dB/dt$ . Определите, что покажет вольтметр, если его поместить:

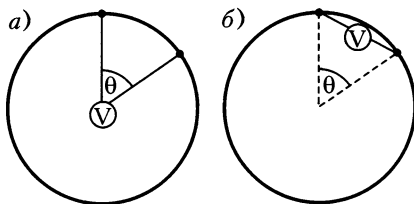


Рис. 79

а) в центре кольца;

б) на хорде, соединяющей точки подключения.

**У178\*.** Кольцо в виде листа Мёбиуса изготовлено из бумажной ленты, окантованной медным проводом. В разрыв провода

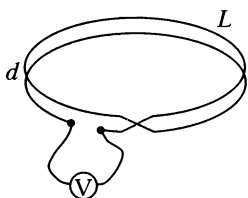


Рис. 80

включен вольтметр  $V$ , как показано на рисунке 80. Перпендикулярно плоскости кольца действует однородное магнитное поле, индукция  $B$  которого изменяется со временем по закону  $B(t) = kt$ . Что показывает вольтметр, если  $L$  — длина, а  $d$  — ширина ленты?

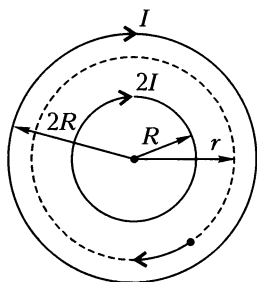


Рис. 81

**У179.** Два длинных coaxialных соленоида с одинаковыми длинами и одинаковым числом витков подключены параллельно к одному источнику тока. Соленоиды изготовлены из одного и того же медного провода, но диаметр внешнего соленоида в два раза больше диаметра внутреннего. В вакуумном пространстве между соленоидами находится неподвижная заряженная частица. Если напряжение источника тока увеличивать с постоянной скоростью, частица будет двигаться по круговой траектории, как показано на рисунке 81. Чему равен радиус  $r$  траектории частицы?

**У180.** Заряд  $Q$  равномерно распределен по тонкому диэлектрическому кольцу массой  $m$ , которое первоначально находится в покое. Какую угловую скорость

приобретет кольцо, если перпендикулярно плоскости кольца включить магнитное поле  $B$ ?

**У181\*.** Хорошо проводящий диск радиусом  $r$ , укрепленный на тонком металлическом валу, вращается с угловой скоростью  $\omega$  внутри длинного соленоида. Оси вала и соленоида совпадают.

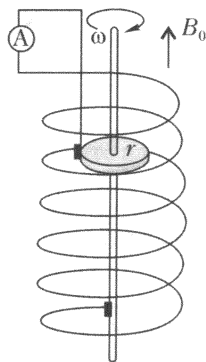


Рис. 82

При помощи скользящих контактов вал и диск соединены последовательно с амперметром и обмоткой соленоида в единую цепь, как показано на рисунке 82. Соленоид имеет  $n$  витков на единицу длины и общее сопротивление  $R$ . Какой ток течет через амперметр, если вся система помещена соосно в однородное магнитное поле Земли  $B_0$ ? Нарисуйте график зависимости тока  $I$  от скорости вращения  $\omega$  (для отрицательных и положительных значений  $\omega$ ). Докажите, что мощность, необходимая для вращения диска, равна мощности тепловыделения в обмотке соленоида.

**У182\*.** Тонкое сверхпроводящее кольцо удерживают симметрично над торцом вертикального цилиндрического магнитного стержня, как показано на рисунке 83. Цилиндрически симметричное магнитное поле в точке  $(z, r)$  в области кольца можно охарактеризовать вертикальной  $B_z$  и радиальной  $B_r$  составляющими вектора магнитного поля:  $B_z = B_0(1 - \alpha z)$  и  $B_r = B_0\beta r$ , где  $B_0$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  – константы,  $z$  и  $r$  –

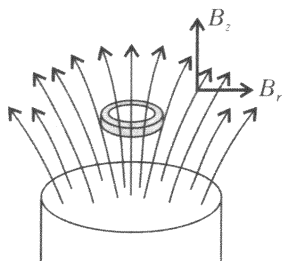


Рис. 83

вертикальная и радиальная координаты соответственно. Первоначально ток в кольце равен нулю. Когда кольцо отпустили, оно начинает двигаться вниз вдоль вертикальной оси. Определите, каким образом движется кольцо и какой ток течет в кольце.

Для расчетов примите следующие данные: масса кольца  $m = 50$  мг, его радиус  $r_0 = 0,5$  см, индуктивность  $L = 1,3 \cdot 10^{-8}$  Гн; индукция магнитного поля  $B_0 = 0,01$  Тл, константы  $\alpha = 2 \text{ м}^{-1}$  и  $\beta = 32 \text{ м}^{-1}$ ; начальные координаты центра кольца  $(0, 0)$ .

**У183\*.** Маленькая электрически заряженная бусинка может скользить по тонкому диэлектрическому кольцу без трения. Электрический диполь установлен в плоскости кольца в его центре. Первоначально бусинку удерживают в точке пересечения перпендикуляра к оси диполя и кольца, как показано на рисунке 84. Как будет двигаться бусинка после того, как ее отпустят? Найдите нормальную силу, действующую на бусинку. Где бусинка

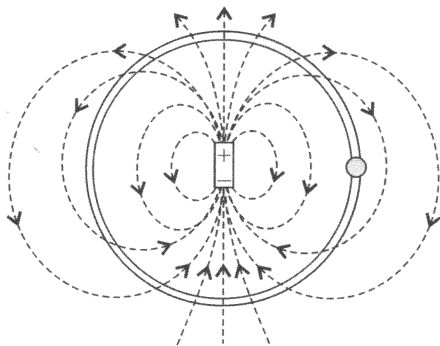


Рис. 84

остановится в первый раз после того, как ее отпустят? Как бусинка двигалась бы в отсутствие кольца? Считайте, что электрические силы намного больше гравитационных, поэтому силу тяжести не учитывайте.

**У184\*.** Точечное тело массой  $m$  и зарядом  $q$ , удерживаемое в покое, находится в однородном поле тяготения и горизонтальном магнитном поле. По какой траектории будет двигаться тело, если его освободить?

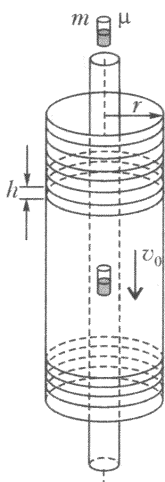


Рис. 85

**У185\*.** Длинная тонкая вертикальная стеклянная трубка расположена соосно внутри широкой стеклянной трубки с внешним радиусом  $r$  (рис.85). На более широкой трубке вдоль всей ее поверхности плотно с шагом  $h$  закреплены металлические кольца. Сопротивление каждого кольца равно  $R$ . Если магниту в виде маленького бруска массой  $m$  и магнитным моментом  $\mu$  предоставить свободно падать внутри тонкой трубки, то через относительно короткое время скорость его достигнет максимального значения  $v_0$  и дальше изменяться не будет. При каждом последующем эксперименте изменяют один из упомянутых параметров:  $m$ ,  $\mu$ ,  $h$ ,  $r$ ,  $R$ , а остальные оставляют неизменными. Как нужно изменять каждый из параметров, чтобы установившаяся скорость магнита увеличивалась в 2 раза? Всеми видами трения, само- и взаимоиндуктивностью пренебречь.

**У186\*.** В вакуумной камере по тончайшему прямому проводу, который имеет очень высокую проводимость, течет ток 10 А. Электроны с начальной скоростью  $v_0$  начинают двигаться перпендикулярно проводу от точки, которая находится на расстоянии  $r_0$  от центра провода. Скорость электрона такова, что он не может оказаться на расстоянии меньше чем  $r_0/2$ . Чему равна скорость  $v_0$ ? Влиянием геомагнитного поля пренебречь.

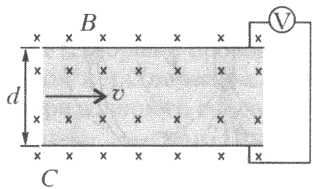


Рис. 86

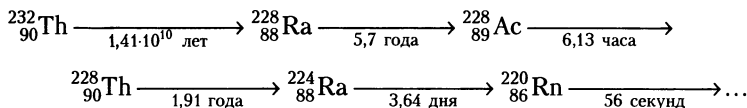
**У187\*.** Первоначально незаряженный конденсатор помещен в магнитное поле индукцией  $B$ , параллельное его пластинам (рис.86). Между пластинами перпендикулярно вектору магнитного поля начинает течь со скоростью  $v$  электрически нейтральная жидкость. Расстояние между пластинами конденсатора  $d$ , диэлектрическая проницаемость жидкости  $\epsilon$ . Какое напряжение покажет вольтметр, подключенный к пластинам конденсатора?

**У188.** Если бы ядро урана раскололось на три части, то выделившаяся энергия была бы больше, чем в случае распада его на две части. Почему в природе уран распадается только на две части?

**У189\*.** Изотоп  ${}^7\text{Be}$  – радиоактивный элемент с периодом

полураспада 53,37 дней. Когда бериллий нагревают до температуры несколько тысяч градусов, его период полураспада изменяется. Как это можно объяснить?

**У190\*.** Часть радиоактивного ряда, начинающегося с тория-232, представлена (вместе с соответствующими периодами полураспада) ниже:



Из руды извлечены торий-232 и торий-228, находящиеся в равновесии, и очищены химическим путем. Нарисуйте вид зависимости изменения числа атомов радона-220, которую необходимо ожидать в течение времени от  $10^{-3}$  до  $10^3$  лет (в логарифмическом масштабе) в  $10^{-3}$  кг исходного материала.

**У191.** Каким напряжением должны быть ускорены протоны, чтобы при столкновении с неподвижными протонами стало возможным образование пары протон-антипротон? Считайте, что энергия массы покоя протона равна приблизительно 1 ГэВ.

**У192\*.** Как будет двигаться позитрон, если его поместить в клетку Фарадея с начальной нулевой скоростью? Считайте, что позитрон – классическая частица, на которую воздействуют электрические силы и поле тяготения Земли (рис.87).

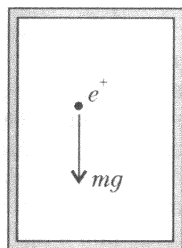


Рис. 87

классическая частица, на которую воздействуют электрические силы и поле тяготения Земли (рис.87).

**У193\*.** Первоначально два позитрона и два протона удерживаются в вершинах квадрата так, что позитроны находятся на одной диагонали, а протоны – на другой (рис.88). Сторона квадрата  $a = 1$  см. Все частицы одновременно освобождают. Каковы будут их скорости, когда они разлетятся на значительные расстояния друг от друга? Частицы можно рассматривать как классические точечные массы, перемещающиеся в электрических полях друг друга. Гравитационным взаимодействием частиц можно пренебречь.

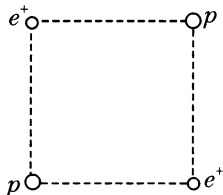


Рис. 88

**У194.** В эксперименте по комптоновскому рассеиванию неподвижные электроны бомбардируются фотонами, энергия которых равна энергии покоя электрона. Найдите угол между

рассеянными фотонами и электронами, импульсы которых имеют одинаковую величину. Какова скорость таких электронов?

**У195.** Рентгеновские фотоны рассеяны на угол  $90^\circ$  первоначально покоящимися электронами. Как изменилась длина волны фотонов?

**У196.** Вообразите, что классический электрон – это маленький шарик. Каков минимальный радиус такого электрона, если считать, что его электростатическая энергия не больше его энергии покоя  $mc^2$ ? Какова угловая скорость электрона, если его момент импульса равен  $\hbar/(4\pi)$ ? Какой «экваториальной» скорости это соответствует, если вся энергия покоя электрона обеспечивается электростатическим полем?

**У197\*.** Электрон находится в большой прямоугольной коробке. Оцените порядок толщины слоя (на дне коробки), который занят электроном в результате гравитационного воздействия.

**У198\*.** Согласно классическим представлениям, электростатическое поле атомного ядра могло бы притянуть электрон к этому ядру. Однако соотношение неопределенностей Гейзенберга устанавливает такую высокую кинетическую энергию для электрона, замкнутого в маленьком пространстве ядра, что электрон покинул бы ядро в любом случае. Каким могло бы быть атомное число трансуранового элемента, способного удерживать электрон в пределах своего ядра в течение существенного времени, если только сам элемент был бы достаточно устойчив?

**У199\*.** Используя скорость поверхностных (капиллярных) волн на воде и скорость звуковых волн в воде, покажите, как можно было бы определить размер молекул воды. Примите во внимание, что скорость распространения поверхностных волн с длиной волны 1 см приблизительно в 10000 раз меньше скорости звука в воде.

**У200.** Поздравляем! Вы добрались до последней задачи в книге, и есть подходящий способ поздравить вас – это выпить вместе с вами шампанское за ваше здоровье. К сожалению, мы не можем осуществить это практически, но можем, по крайней мере, предложить вам последнюю задачу... о шампанском.

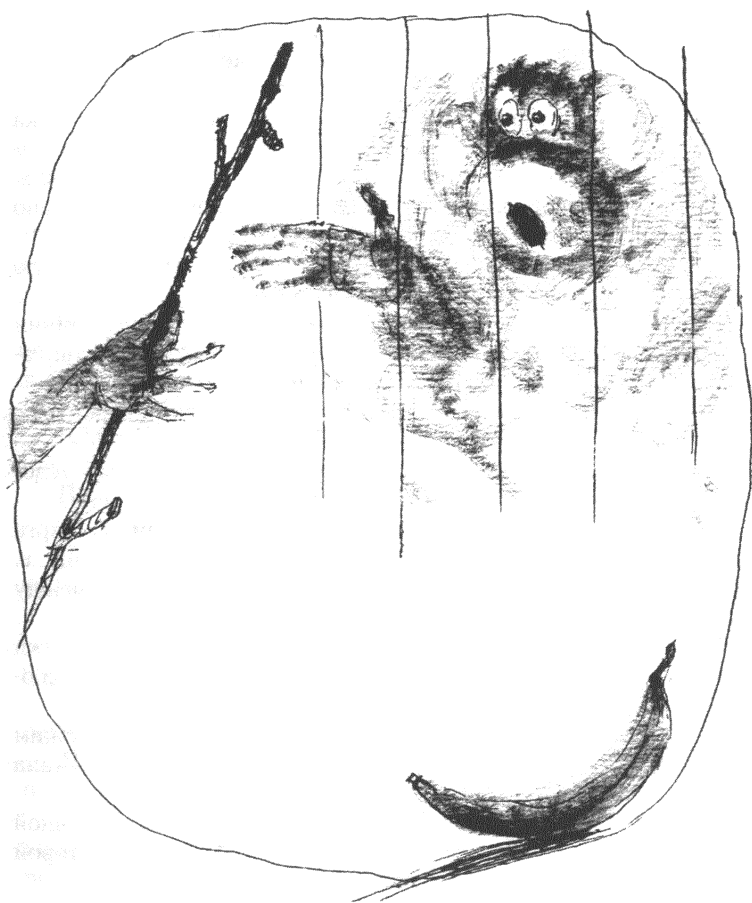
Всем знакомы пузырьки в шампанском. Они формируются почти исключительно на стенках бокала с шампанским, а затем поднимаются вверх, причем все быстрее и быстрее. Почему ускоряются пузырьки в шампанском?



**ПОДСКАЗКИ К ЗАДАЧАМ**

*Dictum sapienti sat est*

*Для умного довольно и слова*



**П1.** Разложите вектор скорости улитки на подходящие составляющие. Имеется несколько способов разложения, которые приводят к различным методам решения задачи. Уравнение траектории, например, легче получить в полярных координатах.

**П2.** Вычислите максимально возможное значение коэффициента трения, при котором предмет не должен остановиться на столе.

**П3.** Решение задачи в случае а) тривиально, так как лодка плывет быстрее, чем течет река. В случае б) разумно выбранное векторное сложение может помочь определить направления, в которых лодочник мог бы грести. Должно быть выбрано направление, соответствующее самому короткому пути.

**П4.** Хотя вся перемещающаяся часть ковра имеет единичную скорость, ее центр масс имеет меньшую скорость.

**П5.** Нарисуйте пространственно-временные мировые линии улиток. Результат можно также получить, используя эквивалентность различных инерциальных систем отсчета.

**П6.** Сравните высоты, на которые поднялись центры масс двух червей.

**П7.** Вы можете обосновать ваше решение с помощью условий статического равновесия и закона сохранения энергии.

**П8.** Определите, какой дополнительный объем айсберга окажется в воде, если он еще погрузится на малую глубину  $x$ . Используйте условие плавания тел, чтобы найти связь между массой айсберга и его габаритными размерами.

**П9.** При парковке сумма напряжений в пружинах подвески остается неизменной, а сумма моментов сил относительно любой оси должна быть равна нулю.

**П10.** Самая сложная часть решения – определить, каким образом силы трения могут уравновешивать силу тяжести Жана Вальжана и силы реакции стен одновременно.

**П11.** Расстояние между геометрическим центром составной сферы и ее центром масс не может быть больше некоторой величины. Найдите это расстояние.

**П12.** Опишите движение шарика в декартовой системе координат, одна из осей которой параллельна наклонной плоскости.

**П13.** Из-за ускорения, связанного с его движением, хомяк прикладывает к платформе силу, создавая момент сил, который может уравновесить момент силы тяжести хомяка.

**П14.** Возьмите велосипед и поэкспериментируйте.

**П15.** Используйте закон всемирного тяготения Ньютона и выразите массу Солнца через его среднюю плотность.

**П16.** Сравните гравитационные поля, созданные Солнцем на Земле и одного из компонентов двойной звезды в месте нахождения другого компонента.

**П17.** Космические зонды выгоднее запускать с экватора в восточном направлении.

**П18.** Исследуйте приращение скорости ракеты при разных режимах использования энергии дополнительного топлива.

**П19.** Центр масс системы, т.е. стального шарика и меда, перемещается вниз. Импульс меда можно получить вычитанием импульса шарика из полного импульса системы.

**П20.** Если стенка сосуда имеет температуру, отличающуюся от температуры газа, то при столкновении со стенкой молекулы газа или забирают энергию от стенки, или отдают энергию ей.

**П21.** Различие температур для этих двух шаров возникает потому, что при нагревании их центры масс перемещаются по вертикали в противоположных направлениях.

**П22.** Задача решается без подсказки.

**П23.** Такая ситуация возможна, причем достаточно использовать только два резистора.

**П24.** Учтите, что во время вытекания воды центр тяжести ведра с водой изменяется.

**П25.** Выясните, при каких условиях добавление небольшого количества воды неизбежно поднимет общий центр тяжести.

**П26.** Мы утверждаем, что вода не затечет в кастрюлю. Чтобы доказать это, необходимо рассмотреть действия силы и крутящего момента, вызванных цепью.

**П27.** Вычисление выталкивающей силы – существенная часть решения.

**П28.** Для того чтобы пузыри плавали в воздухе, средняя плотность пузыря должна быть такой же, как у воздуха.

**П29.** Давление внутри жидкости на конце трубки уравнивается атмосферным давлением и давлением, обусловленным поверхностным натяжением (за счет кривизны поверхности).

**П30.** Вся система (распределение токов и линий электрического поля) сферически симметрична, поэтому и магнитное поле должно быть таким же. А какие сферически симметричные магнитные поля (экспериментально наблюдаемые) возможны в отсутствие магнитного монополя?

**П31.** Используйте симметрию распределения заряда.

**П32.** Сравнение только гравитационных ускорений недостаточно, так как неизвестно, с какой начальной скоростью прыгун в высоту был бы способен оторваться от поверхности. Нужно проанализировать движение центра масс прыгуна в течение всего прыжка.

**П33.** Необходимо лишь найти неравенства, связывающие расстояния и интервалы времени движений.

**П34.** Если разложить силу натяжения нити на радиальную и тангенциальную составляющие, то направление нити можно определить, используя условия равномерного кругового движения груза.

**П35.** Докажите, что в любой момент времени тела, которые одновременно начали скользить без трения по прямым направляющим из одной и той же точки в различных направлениях, лежат на одной (воображаемой) сферической поверхности.

**П36.** Используя вращающуюся систему отсчета, связанную с минутной стрелкой, задачу можно решить элементарным способом.

**П37.** Камень удаляется от бросающего до тех пор, пока радиальная составляющая его скорости не уменьшится до нуля. Если этого не произойдет, то условие задачи выполнится.

**П38.** Неправильно думать, что траектория кузнечика (с минимальной скоростью прыжка) должна касаться ствола в его самой верхней точке.

**П39.** Блохи точно не могут прыгнуть непосредственно навстречу друг другу и при этом не столкнуться. Рассмотрите прыжки в некоторых других направлениях с сохранением симметрии в целом. Обратите внимание, что масса соломинки задана.

**П40.** Должна быть определена форма общей поверхности, огибающей водяные струи. Вода в струях вытекает из одного и того же места, имеет одну и ту же начальную скорость и движется по параболическим траекториям. Исследуйте условие прохождения произвольной водной струи через заданную точку пространства.

**П41.** Покажите, что дальность  $R_0$  определяется по фор-

муле

$$R_0 = \frac{v^2}{g} \left( \sin 2\theta + \frac{EQ}{mg} (1 - \cos 2\theta) \right),$$

и найдите ее максимум.

**П42.** Нормальные составляющие сил реакции, возникающие между стержнем и пальцами, вообще говоря, не одинаковы. Скольжение происходит сначала там, где максимальная сила трения покоя меньше. Пусть это будет первый палец. Однако из-за увеличивающейся нормальной составляющей силы реакции сила трения скольжения на первом пальце постепенно увеличивается и становится больше силы трения покоя на втором пальце. Ситуация меняется на противоположную: теперь скольжение будет происходить по второму пальцу. В течение всего процесса, когда определяется центр тяжести стержня, скольжение (и нескольжение) чередуется на обоих пальцах. Совершенную работу можно рассчитать как сумму работ на каждой стадии.

**П43.** Процесс необходимо начинать с вершины! Правильная стратегия состоит в том, чтобы отодвигать самый верхний кирпич настолько, насколько возможно, и затем делать то же самое уже с двумя верхними кирпичами, рассматриваемыми как целое, и так далее вниз.

**П44.** Используйте условия равновесия сил и крутящих моментов, действующих на пластину, чтобы найти связи между силами трения. Удобен графический метод.

**П45.** Процесс нужно рассматривать как ряд последовательных столкновений.

**П46.** Покажите, что в первом столкновении часть начальной кинетической энергии, переданной среднему шару, равна  $4\mu M/(\mu + M)^2$ .

**П47.** При столкновении импульс, энергия и момент импульса системы не изменяются.

**П48.** Проанализируйте движение тел, разложив его на движение центра масс системы и движение относительно центра масс. Используя законы сохранения энергии, импульса и момента импульса, покажите, что в случае нерастяжимой нити центр масс системы движется поступательно с постоянной скоростью вдоль оси  $y$ , а шайбы вращаются вокруг него с постоянной скоростью.

**П49.** Обычное рассуждение, которое предполагает, что за 1 минуту треть кюветы наполняется, а половина кюветы сливает-

ся, неверно. Вода из крана втекает в кювету с постоянной скоростью, а вытекает из кюветы тем быстрее, чем выше уровень воды в кювете.

**П50.** Покажите, что свободная поверхность представляет собой параболоид вращения  $z = \omega^2 r^2 / (2g)$ , где  $z$  – расстояние по высоте от самой низкой точки свободной поверхности, а  $r$  – радиальное расстояние от центральной оси. Определите объем воздуха над жидкостью внутри сосуда.

**П51.** Автомобиль – незакрытая система; он находится в контакте со своим окружением, в данном случае – с Землей.

**П52.** Фокусное расстояние можно получить из формулы линзы и выражения для увеличения. Отношение значений яркости зависит не только от размера изображений, но и от светового потока, попадающего на линзу.

**П53.** Видимая величина мнимого изображения определяется не его размером, а углом, под которым крайние лучи от предмета попадают в глаз.

**П54.** Получите выражение  $n_{\text{ст}} \sin(\theta + \varphi) \geq n_{\text{в}}$ , где  $\varphi$  – угол в стекле между лучом и нормалью к поверхности в точке, где луч входит в призму.

**П55.** Никакое пятно света не может быть обнаружено как совсем рядом с призмой, так и очень далеко от нее. Расстояние до ближайшего участка светлого пятна определяется полным внутренним отражением. Расстояние до края удаленной части светлого пятна можно определить, рассматривая часть призмы, расположенную близко к столу, как плосковыпуклую линзу.

**П56.** Вычислите, какая часть потока солнечного света, отраженного от поверхности Луны, достигает поверхности Земли.

**П57.** Наиболее удобная скорость ходьбы может быть связана с длиной ноги и периодом, с которым она качается свободно, подобно маятнику. Бег можно рассматривать как вынужденное колебание с периодом, зависящим от момента инерции ноги и крутящего момента, который создается мускулами.

**П58.** Используйте закон сохранения энергии для сопоставления мгновенных скоростей вращения и интервалов времени перехода из горизонтального положения в вертикальное для каждого маятника.

**П59.** Подумайте, от каких физических величин может зависеть подъемная сила вертолета.

**П60.** Исследуйте зависимость угловой скорости стержня от угла отклонения стержня от вертикали. Используйте закон сохранения энергии и свяжите составляющие силы реакции между столом и стержнем с ускорением, которое они сообщают.

Для случая а) на гладких стенках углубления могут возникать только вертикальная и горизонтальная силы реакции. Для случая б), когда край стола представляет собой часть цилиндрической поверхности, реакцию опоры можно разложить на нормальную и тангенциальную составляющие, как обычно, причем нормальная составляющая направлена по оси стержня.

**П61.** Когда коэффициент трения маленький, острие карандаша перемещается сначала назад, а потом чуть-чуть вперед. Если коэффициент трения больше некоторого критического значения (которое, как можно показать, равно приблизительно 0,37), то острие стоит на месте, а карандаш движется вперед. Используя тот факт, что трение скольжения уменьшает механическую энергию, можно показать, что острие карандаша никогда не теряет контакта со столом.

**П62.** Используйте уравнение состояния идеального газа, чтобы показать неизменность массы воздуха. Заметьте также, что спустя большой интервал времени температура системы не изменится.

**П63.** Из-за поверхностного натяжения давление внутри водяного пятна меньше атмосферного, так как свободная поверхность пятна вогнутая.

**П64.** Вычислите скорости точек нити в любой момент времени.

**П65.** Рассмотрите движущуюся систему отсчета, связанную с концом нити.

**П66.** Попробуйте пустить шарик по ломаной кривой, состоящей из отрезка с большим наклоном к горизонту и отрезка с малым наклоном.

**П67.** С помощью рисунка к условию вы можете определить угол между стеной и веревкой, который не дан в тексте.

**П68.** Центр масс ножек измерителя всегда находится на вертикали ниже точки подвеса, независимо от угла раствора ножек измерителя, хотя положение центра масс каждой ножки изменяется. Используйте этот факт, чтобы найти решение задачи с минимумом вычислений.

**П69.** Запишите условие равновесия пластины в векторном виде.

**П70.** Обратите внимание, что система в целом не имеет никаких внешних горизонтальных сил, действующих на нее. Поэтому, что бы внутри системы ни происходило, ее центр масс не меняет свои горизонтальные координаты. Необходимо использовать закон сохранения горизонтальной составляющей импульса системы.

Это может показаться удивительным, но, основываясь на решении этой задачи, попробуйте решить еще одну.

Бедный студент и ревностный контролер, каждый массой  $m$ , находятся в неподвижном, но могущим двигаться с очень малым трением железнодорожном вагоне массой  $M$ . Когда контролер понимает, что у студента нет билета, студент начинает бежать к концу вагона, а контролер его преследует, перемещаясь со скоростью  $v$  относительно вагона. Студент останавливается в конце вагона у открытой двери и прыгает с подножки. Найдите скорость вагона, когда контролер достигнет открытой двери, остановится там и будет наблюдать за убегающим студентом.

**П71.** Рассмотрите движение в системе центра масс бусинок.

**П72.** В случае неупругих столкновений понятно, что по прошествии достаточно большого времени все возрастающая масса соединенных бусинок начинает двигаться с постоянной скоростью. Для упругих столкновений сначала исследуйте, что случилось бы, если бы внешняя сила действовала только до момента первого столкновения.

**П73.** Рассмотрите, что происходит с системой в разные моменты времени.

**П74.** В упрощенном варианте считаем, что вязкость воды равна нулю и потенциальная энергия жидкости не меняется. Обратите внимание, что в этом случае желоб не может изменить горизонтальный импульс струи воды. Примените уравнение Бернулли (несколько раз!).

**П75.** Получите выражения для изменения потенциальной и кинетической энергий за малый промежуток времени  $\Delta t$  для первоначально неподвижной жидкости, когда она только начинает вытекать с ускорением  $a$ .

**П76.** Опыт показывает, что скорость, с которой песок проходит через узкое место, не зависит от количества песка в верхней колбочке песочных часов. Это объясняется тем, что из-за трения между песчинками средняя скорость движения высыпавшегося песка зависит только от его близлежащей окружающей среды, прежде всего от диаметра отверстия, а не от воздействий, происходящих от отдаленных частей. (Это несправедливо для жидкостей, где воздействие давления передается на большие расстояния.) Поэтому расход песка зависит только от поперечного сечения узкого места устройства. Таким образом, время, которое требуется на пересыпание всего песка, должно быть пропорционально кубу начальной высоты  $H$  песка. Найдите другие параметры, от которых может зависеть это время, и затем примените метод размерностей.



**П77.** Сила, возникающая при малом смещении конца пружины из положения равновесия, определяется выражением  $F(x) = -kx^3/l_0^3$ , где  $k$  – жесткость пружины. Используя метод размерностей, можно вывести зависимость периода колебаний от постоянной  $k$ , массы шарика и амплитуды колебаний.

**П78.** В данных обстоятельствах можно считать, что груз совершает горизонтальные и вертикальные гармонические колебания.

**П79.** Опишите движение в неинерциальной системе отсчета, связанной с замедляющимся поездом.

**П80.** Исследуйте движение в системе отсчета, связанной с клином.

**П81.** Рассмотрите, при каких условиях длинная тонкая гибкая нить движется равномерно над экватором по синхронной орбите, т.е. с той же угловой скоростью, что и Земля.

**П82.** Центробежное ускорение автомобиля равно  $a_n = v^2/r$ , где  $v$  – скорость автомобиля и  $r$  – радиус кривизны моста. Радиус кривизны можно найти из аналогии со свободным падением тела по параболе.

**П83.** Основа решения – определение радиуса кривизны трека (см. указание к предыдущей задаче).

**П84.** В любой момент времени лодка приближается по направлению к точке  $B$  со скоростью, равной разности скорости лодки и проекции скорости течения воды на это направление.

**П85.** Сила трения всегда направлена против скорости, поэтому в первый момент времени мальчик начинает скользить вниз по горке, как будто нет никакого трения. Постепенно ситуация изменяется, все большая часть максимально возможной силы трения начинает действовать вдоль горки, а меньшая – поперек нее. В конце концов поперечная скорость мальчика станет равной нулю.

**П86.** См. указание к задаче 84.

**П87.** Из-за симметрии задачи тела находятся всегда в углах уменьшающегося правильного  $n$ -угольника, и каждое из них движется так, как будто на него действует одна сила гравитационного притяжения к одному эквивалентному телу, находящемуся на оси симметрии. Время, требуемое для «схлопывания» системы в центре, можно рассчитать с помощью третьего закона Кеплера.

**П88.** При решении следует применить все три закона Кеплера для движения тел в поле центральных сил.

**П89.** Вспомните величину индукции и направление линий

индукции магнитного поля магнитного диполя:  $B_{\parallel} = 2k\mu/L^3$  на его полярной оси и  $B_{\perp} = k\mu/L^3$  на его экваторе, где  $k = \mu_0/(4\pi)$ .

**П90.** Силу, действующую на заряд, можно найти методом зеркальных изображений. Эта сила обратно пропорциональна квадрату расстояния между зарядами. Поэтому поведение заряда подобно движению тела, описанному в соответствии с законами Кеплера для вырожденной эллиптической орбиты.

**П91.** Чтобы найти значение напряженности электрического поля и плотности наведенных поверхностных зарядов в области под шариком, используйте метод зеркальных изображений. «Отрицательное давление» электростатических сил, действующих на поверхность морской воды под шариком, уравновешено гидростатическим давлением водяного выступа («максимума»).

**П92.** Примените метод зеркальных изображений для сферической поверхности. Этот метод основан на том, что можно найти такой фиктивный заряд, сопряженный данному заряду, и такое его расположение, что эти заряды (данный и фиктивный) вместе дают нулевой потенциал на заданной сферической поверхности.

**П93.** Нужно использовать две системы координат: лабораторную (неподвижную) и связанную с центром масс.

**П94.** Если посмотреть на процесс удара в деталях, то надо заметить, что сразу после столкновения первый шар останавливается в своем поступательном движении, но продолжает вращаться с той же скоростью, как будто ничего не произошло. Второй шар, наоборот, начинает двигаться поступательно без вращения. Таким образом, при центральном ударе первый шар передает второму только импульс поступательного движения, но не момент импульса. После столкновения трение, с одной стороны, ускоряет поступательное движение первого шара вперед, но замедляет его вращение. С другой стороны, трение замедляет поступательное движение второго шара, приводя его во вращение. Процесс перекачки энергий прекратится, как только качение и поступательное движение будут согласованы.

**П95.** Используйте закон сохранения энергии, но не забудьте о потерях на тепло.

**П96.** Исследуйте момент импульса шара относительно оси, проходящей через произвольную точку траектории шара.

**П97.** Убедитесь в том, что только восточно-западная составляющая импульса движения имеет значение.

**П198.** Уравнения движения и связей между поступательными и угловыми ускорениями являются самыми важными в решении.

**П199.** По отношению к энергии и импульсу система не замкнута, поэтому они не сохраняются. Странное явление, описанное в задаче, объясняется законом сохранения момента импульса.

**П100.** Рассмотрите силы, действующие на малую дугу кольца, которая стягивает малый угол  $\Delta\theta$ .

**П101.** Определите разность  $\Delta F$  сил, растягивающих веревку, в двух точках поверхности цилиндра, угловое расстояние между которыми равно  $\Delta\alpha$ . Это изменение силы  $F$  пропорционально нормальной силе давления  $N$ , а она, в свою очередь, пропорциональна  $F$ . Рассмотрите подобные явления, когда скорость изменения некоторой величины пропорциональна самой величине (например, радиоактивный распад, разрядка конденсатора и т.д.). Используя аналогию, можно получить соотношения, применимые к данной веревке.

**П102.** Дженни предполагает, что Чарли рассматривает однородное кольцо, вращающееся с постоянной угловой скоростью относительно оси, проходящей через его центр перпендикулярно его плоскости. Дженни должна определить, какие силы действуют на кольцо, и использовать второй закон Ньютона для центра масс части кольца.

**П103.** Сила тяжести не только ускоряет висящую часть цепочки, но и приводит в движение следующее звено. Это означает, что нужно принять во внимание изменяющуюся массу перемещающейся цепочки.

**П104.** Можно пренебречь гравитацией в системе отсчета, перемещающейся с центром масс цепи. Исследуйте, в каком направлении действуют силы на малую часть цепи, которая имеет радиус кривизны  $R$  и перемещается с постоянной скоростью  $v$ . Отсюда можно определить, как деформирована форма цепи (см. также задачи 100, 101 и 102).

Мы можем подсказать, что предположение Фрэнка правильное – цепь сохранит свою первоначальную форму.

**П105.** Вычислите натяжение в цепи, когда она покидает шкив. Используйте закон сохранения энергии (см. также задачу 104).

**П106.** Исследуйте движение петли в системе отсчета, перемещающейся с той же скоростью  $s$ , что и центр петли. В этой системе участки петли вращаются с постоянной угловой скоростью.

**П107.** Исследуйте изменение горизонтальной составляющей импульса песка, падающего на конвейер в единицу времени.

**П108.** Примените закон сохранения энергии; потом найдите силу, используя функцию изменения импульса свернутого шланга в зависимости от его положения.

**П109.** Внутри тонкой сферической оболочки при однородном распределении масс поле тяготения равно нулю. Вне оболочки поле тяготения таково, как если бы масса оболочки была сконцентрирована в ее центре.

**П110.** Поле тяготения внутри однородного шара прямо пропорционально радиусу (см. задачу 109). Поле тяготения внутри шара с полостью можно найти суперпозицией полей однородного шара и меньшего шара отрицательной массы.

**П111.** Поделите полушарие на полусферические оболочки одинаковой толщины. Докажите, что каждая из этих оболочек в отдельности создает в рассматриваемой точке одно и то же поле тяготения.

**П112.** Вычислите силу «мифического гиганта», которую он должен был бы развить, чтобы удерживать две половины астероида (уже разрезанного на две части), находящиеся на расстоянии 1 м друг от друга.

**П113.** Электрическое поле вызывает силу, пропорциональную площади сечения и направленную перпендикулярно ему. Обратите внимание, что эта сила подобна силе давления жидкости или газа на стенки сосуда.

**П114.** На первый взгляд кажется, что некоторые параметры отсутствуют. Не волнуйтесь! Найдите условие равновесия и вычислите энергию электростатического взаимодействия системы в этой ситуации.

**П115.** Найдите максимальное количество водорода, который мог бы первоначально содержать контейнер, чтобы не разорваться. Материал, из которого сделан контейнер, можно выбрать любой, но только из реально существующих материалов.

**П116.** Законы, описывающие гравитационные и электростатические поля, подобны. Используйте это подобие и примените закон Гаусса.

**П117.** Начните с определения электрического поля, созданного малым элементом стержня, который виден из точки  $C$  под углом  $\Delta\alpha$ .

**П118.** Рассмотрите два очень длинных стержня, являющихся продолжением друг друга.

**П119.** Вы можете отличить правильные формулы от ложных, рассматривая случай, в котором  $\theta$  приближается к  $\pi$ .

Чтобы найти коэффициент пропорциональности, воспользуйтесь известным выражением для магнитного поля длинного прямого провода с током.

**П120.** Вообразите, что другой такой же соленоид с таким же током приставлен соосно к исходному соленоиду в точке  $P$ , и воспользуйтесь принципом суперпозиции.

**П121.** Легко найти силу, если рассмотреть случай разноименно заряженных пластин.

**П122.** Помните, что полный заряд на изолированной пластине не может измениться.

**П123.** Полный заряд, индуцированный на каждой пластине, не изменится, если точечный заряд  $Q$  распределить равномерно по плоскости, отстоящей на  $x$  от нижней пластины.

**П124.** Полное электрическое поле вне пластин должно быть точно нулевым.

**П125.** Вообразите, что среда разрезана на много тонких слоев, перпендикулярных оси  $y$ . Эти слои можно рассматривать как плоскопараллельные пластины с различными показателями преломления. Луч света входит каждый раз в новую пластину с другим показателем преломления.

**П126.** Воспользуйтесь простой геометрией. Определите полезную площадь поверхности компакт-диска, а чтобы получить требуемый результат, разделите эту площадь на  $650 \cdot 10^6$  и еще на 8, потому что 1 байт = 8 бит. Вы можете считать компакт-диск отражающей решеткой и измерить дифракционный угол, используя лазерный пучок известной длины волны.

**П127.** Определите произведение  $n\lambda$  для сложной линии и рассмотрите возможные значения порядка дифракционного спектра.

**П128.** В случае а) оптическая разность хода лучей, проходящих в точку наблюдения, состоит из двух частей, которые возникают до и после решетки. В случае б) вместо рассмотрения оптической решетки исследуйте дифракцию от одной щели.

**П129.** Рассмотрите уровни жидкости и давления в пространстве между телами и снаружи.

**П130.** Найдите горизонтальные силы, действующие на воду под изогнутой поверхностью.

**П131.** Во время испарения площадь поверхности капли и ее поверхностная энергия уменьшаются. Сравните изменение этой энергии с энергией, необходимой для испарения.

**П132.** Давление насыщенного пара около поверхности меньшей капли несколько выше, чем около поверхности большей. В связи с этим малая капля быстрее испаряется, чем большая.

Если малых капель очень много, то испарение с поверхности большой капли может быть с лихвой компенсировано конденсацией пара за счет испарения с поверхностей малых капель.

**П133.** Увеличение внутренней энергии воздуха в цилиндре равно уменьшению потенциальной энергии груза, подвешенного к поршню.

**П134.** Если гора очень высокая, то ее основание может расплавиться из-за высокого давления. Сравните энергию, необходимую для того, чтобы расплавить слой основания горы, с гравитационной энергией, которая высвободится, если гора осядет.

**П135.** Оказывается, что рассматриваемый процесс в относительных координатах для давления и объема изображается прямой линией.

**П136.** Ваше объяснение должно быть основано на взаимодействии между расплавленной магмой и льдом.

**П137.** Гидростатическое давление воды в вертикальном канале увеличивает давление воды в полости, так что она кипит при большей температуре, чем обычно. Связь между давлением  $p$  насыщенного водяного пара и температурой  $T$  воды имеет вид

$$p = A e^{-L_m/(RT)},$$

где  $L_m$  – молярная теплота парообразования воды,  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $A$  – константа, имеющая размерность давления. Извержение гейзера начинается тогда, когда закипит вода в полости. При этом из вертикального канала выбрасывается вода, давление в полости резко падает, перегретая вода кипит еще более интенсивно, за счет чего остывает до  $100^\circ\text{C}$  и перестает кипеть. Извержение прекращается.

**П138.** Рассмотрите тепловой баланс в тонком слое льда толщиной  $dx$ .

**П139.** Покажите, что для тел с подобной формой время, требуемое для оттаивания, пропорционально квадрату их линейных размеров.

**П140.** «Западня», скрытая в этой задаче, касается теплоты парообразования. Удельная теплота парообразования воды при  $100^\circ\text{C}$  и давлении 1 атм равна  $2256\text{ кДж/кг}$ . Примите во внимание не только более высокую внутреннюю энергию пара, чем воды, но также и работу, произведенную при расширении против атмосферного давления.

**П141.** Жидкость начинает кипеть только тогда, когда давление насыщенного пара достигает или превосходит давление газа над жидкостью.

**П142.** Рассмотрите, как период колебаний  $T$  мог бы быть включен в формулу для амплитуды колебаний.

**П143.** Сравните поверхностную энергию длинного водяного цилиндра (предполагая, что паутина равномерно покрыта водой) с поверхностной энергией периодически расположенных капель воды.

**П144.** Цилиндр продолжает ускоряться, пока суммарный импульс, полученный им в единицу времени со стороны частиц, сталкивающихся с ним слева и справа, не станет нулевым. Однако если подождать очень долго, то, согласно второму закону термодинамики, цилиндр прекращает двигаться.

**П145.** Примите во внимание законы излучения и поглощения энергии для абсолютно черного тела, а также постоянство потока энергии наружу.

**П146.** Энтропия системы не может уменьшаться в течение процесса.

**П147.** Рассмотрите энтропию с точки зрения числа доступных микросостояний.

**П148.** Вычислите изменение энтропии воздуха, который перекачивают в баллон.

**П149.** Напряженность электрического поля внутри космического корабля равна нулю (как и внутри клетки Фарадея). Исследуйте, изменится ли электрический потенциал космического корабля в течение рейса.

**П150.** Исследуйте изменение энергии сферического конденсатора с постоянным зарядом при изменении его объема.

**П151.** Сравните энергии электростатических полей фольги в обоих случаях.

**П152.** Ясно, что разноименные заряды на обкладках конденсатора притягиваются друг к другу, поэтому, чтобы раздвинуть пластины на большее расстояние, нужно совершить работу. Однако, с другой стороны, при увеличении расстояния между пластинами емкость конденсатора уменьшается, уменьшается и энергия конденсатора, так как напряжение на нем не изменяется. Это означает, что мы работу не совершаем. Разрешение этого парадокса состоит в том, что конденсатор, связанный с батареей, нельзя рассматривать как изолированную систему.

**П153.** Так как в каждом витке ток течет в одну и ту же сторону, соседние витки притягиваются друг к другу, и пружина сокращается. Силу, сжимающую пружину, можно найти, рассматривая силу взаимодействия двух сверхпроводящих колец, по которым течет ток в одну и ту же сторону. Увеличьте

число колец до  $N$  и исследуйте зависимость энергии этой замкнутой системы от ее длины.

**П154.** Найдите результирующую силу (сумму магнитной силы, силы тяжести и силы натяжения в пружине), действующую на магнит  $A$  как функцию  $F(x)$ , где  $x$  – расстояние между магнитами. Используйте  $F(x)$ , чтобы определить условия равновесия и устойчивости.

**П155.** Вычислите полную работу, произведенную батареей в двух случаях.

**П156.** Не забудьте, что, когда вылили масло, заряд конденсатора не изменился.

**П157.** Плотность энергии электростатического поля (т.е. энергия на единицу объема) пропорциональна квадрату напряженности этого поля:  $w_{эл} = \epsilon_0 \epsilon E^2 / 2$ . Диэлектрик между пластинами конденсатора уменьшает электрическое поле (так как  $\epsilon > 1$ ), и поэтому энергия системы также уменьшается. Силу, действующую на диэлектрик, можно рассчитать по изменению энергии.

**П158.** Примените правила Кирхгофа, начиная с самого правого элемента цепи. Найдите отношения между токами, текущими через параллельные резисторы, используя равенство напряжений на них.

**П159.** Рассмотрите два различных случая: ток  $I$  втекает в одну из точек сетки и ток  $I$  вытекает из соседней точки сетки. В обоих случаях используйте симметрию системы. Затем воспользуйтесь принципом суперпозиции.

**П160.** Примените принцип суперпозиции, как в предыдущей задаче. Будьте осторожны с конечной решеткой, поскольку ток должен вытечь где-нибудь из цепи, чтобы сохранить заряд. Решите эту проблему без нарушения симметрии задачи.

**П161.** Ключ к решению задачи — в параллельности соединения резисторов.

**П162.** Как и в предыдущих трех задачах, принцип суперпозиции приносит большую помощь.

**П163.** Батарея должна быть связана с концами неизвестного резистора через амперметр. Так или иначе, но вы должны обеспечить, чтобы весь ток, измеренный амперметром, тек только через нужный резистор.

**П164.** Найдите наборы эквипотенциальных точек на кубе при условии, что ток втекает в одну вершину куба и вытекает из диагонально противоположной вершины. Тогда, соединяя вместе все точки с одинаковыми потенциалами, цепь можно существенно упростить.



**П165.** Используйте закон Гаусса.

**П166.** Примените закон электромагнитной индукции.

**П167.** Стержень начинает двигаться вниз по наклонной плоскости под действием силы тяжести. Возникающий при этом индукционный ток взаимодействует с внешним магнитным полем, тормозя движение стержня.

**П168.** Изменение скорости стержня прямо пропорционально изменению заряда конденсатора. Стержень ускоряется до тех пор, пока ЭДС самоиндукции может компенсировать остаточное напряжение на конденсаторе.

**П169.** Вы можете ответить на вопрос а), не решая дифференциальное уравнение для цепи. Выразите скорость увеличения магнитной энергии как функцию тока.

В пункте б) обратите внимание на то, что зависимость тока от времени для цепи известна и что джоулево тепло прямо пропорционально квадрату тока. Если вы нарисуете график квадрата тока как функцию времени, то сможете качественно найти время, за которое скорость изменения рассеяния в резисторе является самой высокой. Используя результат для пункта а), количественный ответ можно получить без интегрирования.

**П170.** Рассмотрите сначала цепь, содержащую только одну катушку индуктивности и один конденсатор, соединенные последовательно, и покажите, что в ней имеет место резонанс токов на определенной частоте.

**П171.** Согласно закону сохранения магнитного потока, ток в катушке не может измениться мгновенно.

**П172.** Покажите, что число витков  $n$  на единицу длины соленоида пропорционально  $d^{-2}$ , и рассмотрите сопротивление одного витка.

**П173.** Определите силы, удерживающие электроны в металле на круговых орбитах. По известному электрическому полю, воспользовавшись теоремой Гаусса, можно определить распределение заряда.

**П174.** Электрическое поле можно определить через силу, действующую на неподвижный заряд. Магнитное поле можно найти с помощью силы, действующей на движущийся заряд.

**П175.** Результат Джилл правильный, а ответ Джека неверный. Решающий момент состоит в том, что линии электрического поля в пределах вращающейся спицы не параллельны.

**П176.** Магнитное поле Земли вызывает ток во вращающемся кольце, который изменяет среднее магнитное поле в центре кольца. Это приводит к движению магнитной стрелки.

**П177.** Примените законы Кирхгофа.

**П178.** Лента Мёбиуса — это поверхность, которая имеет только одну сторону, и закон электромагнитной индукции должен быть применен с большой осторожностью. Определите область плоскости, окруженную проводом, и найдите ее эквивалент для ленты Мёбиуса.

**П179.** Рассмотрите не только магнитные силы, действующие на заряженную частицу, но и воздействия на нее вихревого электрического поля.

**П180.** Кольцо испытывает крутящий момент за счет взаимодействия зарядов кольца с вихревым электрическим полем. Можно показать, что конечная угловая скорость кольца зависит только от величины приращения магнитного поля, а не от способа его приращения.

**П181.** При вращении диска в магнитном поле возникает разность потенциалов между периферией диска и его центром. За счет этого в соленоиде возникает ток, магнитное поле которого увеличивает или уменьшает магнитное поле Земли в зависимости от направления вращения диска.

**П182.** Полный магнитный поток через сверхпроводящее кольцо (состоящий из потока, обусловленного внешним полем, и его собственным потоком) не должен изменяться. Поток внешнего поля изменяется во время движения, но его изменение сбалансировано изменением магнитного потока за счет изменения тока в кольце. Если ток в кольце известен, то можно рассчитать силу Лоренца, а значит, и результирующую силу, действующую на кольцо, как функцию его положения. Это конечное уравнение движения подобно известному уравнению механики.

**П183.** Напряженность электрического поля диполя можно рассчитать по его потенциалу  $\phi = k \cos \theta / r^2$ , где  $k$  — постоянная,  $r$  — расстояние от диполя и  $\theta$  — полярный угол между осью диполя и направлением в точку наблюдения. Сначала вычислите нормальную силу, действующую на бусинку.

**П184.** При движении заряда со скоростью  $v_0$  перпендикулярно магнитному полю индукцией  $B$  возникает сила, эквивалентная воздействию на этот заряд электрического поля напряженностью  $v_0 B$ . При соответствующем выборе  $v_0$  это электрическое поле может скомпенсировать поле тяготения, действующее на частицу.

**П185.** Изменяющееся магнитное поле возбуждает вихревые токи в кольцах, которые тормозят падение магнита. Конечная скорость явно зависит от сопротивления колец. Зависимость от других параметров можно найти при помощи метода размерно-

стей. Не забудьте, что формулы, относящиеся к магнетизму, обычно содержат магнитную постоянную  $\mu_0$ , которая имеет нетривиальную размерность.

**П186.** Эту задачу можно решить в системе координат, установленной к вакуумной камере, но такое решение довольно сложное. Намного проще использовать другую систему отсчета, которая перемещается параллельно проводу со скоростью  $v_0$ . В этой системе отсчета электроны движутся под действием и электрического, и магнитного полей. С другой стороны, в этой системе скорость электрона равна нулю, когда он находится на самом близком расстоянии от провода. Это может быть основой для использования теоремы о переходе энергии в работу.

**П187.** Опишите это явление в системе отсчета, связанной с жидкостью. Рассмотрите преобразование электрических и магнитных полей в движущейся системе отсчета. Считайте, что  $v$  много меньше скорости света.

**П188.** Энергия активации процесса трехчастичного распада больше, чем процесса распада на две частицы.

**П189.** Бериллий превращается в литий, захватывая электрон внутренней оболочки ядра.

**П190.** В равновесии количество радиоактивных атомов пропорционально периоду полураспада. Используйте это, чтобы найти равновесное значение для радона-220. Затем рассмотрите, как этот элемент можно получить из очищенного образца.

**П191.** Воспользуйтесь релятивистскими формулами для законов сохранения импульса и энергии.

**П192.** Исследуйте движение позитронов вблизи стенки клетки Фарадея.

**П193.** Масса протона намного (почти в 2000 раз) больше массы позитрона. По этой причине позитроны ускоряются существенно быстрее, чем протоны. В результате наступит такой момент, когда позитроны находятся далеко от квадрата, в то время как протоны лишь едва сдвинулись с места.

**П194.** Воспользуйтесь релятивистскими формулами для законов сохранения импульса и энергии.

**П195.** В ходе этого процесса (комптоновское рассеяние) полная энергия и импульс сталкивающихся частиц (фотоны и электроны) остаются неизменными. При решении задачи удобно взять энергию покоя электрона  $E_0 = m_0 c^2 \approx 511$  кэВ за единицу.

**П196.** Считайте электрон сферическим конденсатором радиусом  $r$  с однородным поверхностным распределением заряда. Момент инерции сферы массой  $m$  и радиусом  $r$  определяется

формулой  $I = \gamma m r^2$ , где  $\gamma$  – безразмерная константа, зависящая от распределения масс в теле. Например, для однородной сферы  $\gamma = 2/5$ , для шара  $\gamma = 3/5$ .

**П197.** Примените принцип неопределенности Гейзенберга и рассмотрите полную энергию электрона.

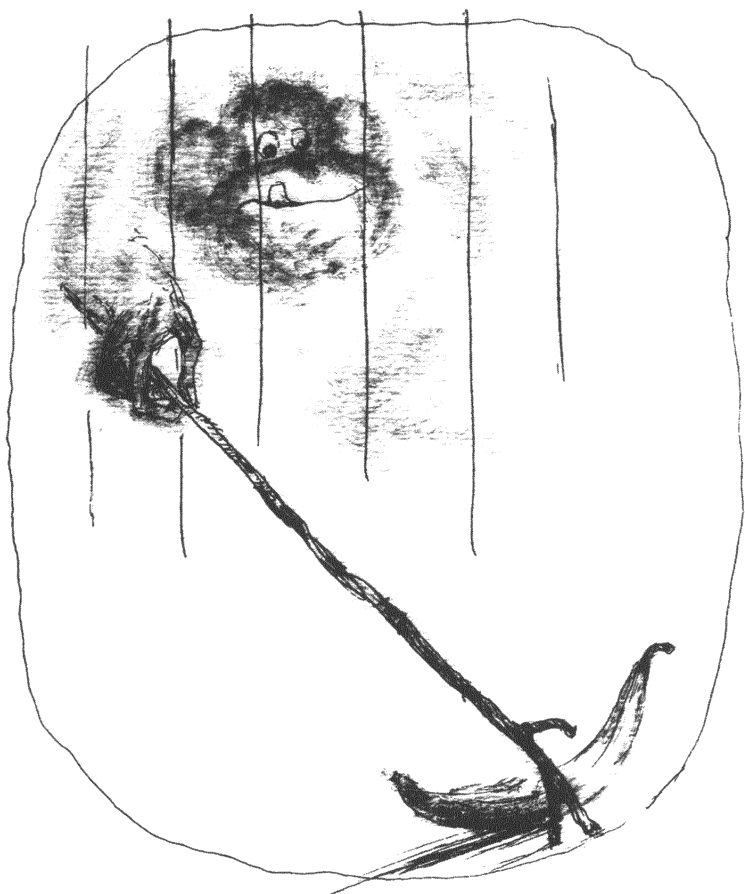
**П198.** Если электрон ограничен сферой радиусом  $r$ , то из принципа неопределенности минимальный импульс вычисляется по формуле  $p \approx \hbar/r$ . Используя приближительные релятивистские формулы, вычислите полную энергию (сумму электростатической и кинетической энергий) электрона как функцию радиуса  $r$  и найдите минимум этой функции.

**П199.** Для небольших длин волн скорость распространения поверхностных волн определяется только поверхностным натяжением. Исследуйте зависимость скорости этих (капиллярных) волн от длины их волны. Рассмотрите, возможно ли ограничение длины волны снизу.

**П200.** Возьмите бутылку шампанского и поэкспериментируйте!

**РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ**

*Indocti discant et ament meminisse periti*  
Неученые пусть учатся, а знающие пусть  
помнят



**Р1.** Система имеет явную симметрию относительно центра, поэтому достаточно рассмотреть движение одной или двух улиток.

**Решение 1.** Разложим вектор скорости улитки 2 на две составляющие: одну в направлении улитки 1, другую – в перпендикулярном направлении (рис.89). Эти две улитки приближаются друг к другу с относительной скоростью  $v + v/2 = 3v/2$ , поэтому они встретятся через время

$$t = \frac{a}{3v/2} = \frac{60 \text{ см}}{7,5 \text{ см/мин}} = 8 \text{ мин}.$$

Значит, и все улитки встретятся через 8 мин. Поскольку они перемещаются относительно неподвижной системы координат со скоростью 5 см/мин, то каждая улитка пройдет расстояние 40 см.

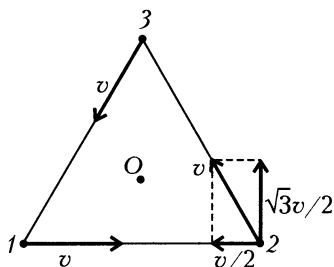


Рис. 89

**Решение 2.** Разложим вектор скорости улитки 2 на радиальную и тангенциальную составляющие, как показано на рисунке 90. Из рисунка видно, что улитки приближаются к центру треугольника с постоянной скоростью  $v_r = \sqrt{3}v/2$ , в то же время двигаясь вокруг этой точки с тангенциальной скоростью  $v_t = v/2$ . Так как улитки находятся сначала на расстоянии  $r = a/\sqrt{3}$  от центра треугольника, они встретятся через время

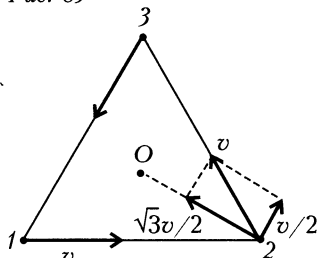


Рис. 90

$$t = \frac{r}{v_r} = \frac{2a}{3v} = 8 \text{ мин}.$$

Расстояние, которое пройдет каждая улитка, определяется так же, как в решении 1.

**Решение 3.** В силу симметрии, каждая улитка перемещается так, что между направлением ее движения и прямой, соединяю-

щей ее мгновенное положение на траектории с центром треугольника, всегда образуется угол  $\pi/6$ . Это позволяет обобщить задачу вычисления пути, пройденного телом по траектории подобного типа.

Рассмотрим движение тела, перемещающегося по кривой с постоянной по величине скоростью  $v$  вокруг неподвижного центра  $O$  с постоянным углом  $\alpha$  ( $0 < \alpha < \pi/2$ ) между вектором скорости и прямой, соединяющей ее мгновенное положение  $M$  на траектории с этим центром (рис.91). Траекторию движения точки в этом случае можно описать в полярных координатах  $(r, \varphi)$ . При повороте вектора  $\vec{r}$  на малый угол  $\Delta\varphi$  его длина уменьшится на малую величину  $\Delta r$ , которая равна длине дуги  $BC$ , умноженной на котангенс угла  $\alpha$ , т.е.

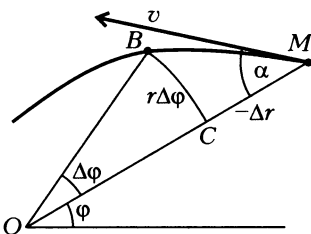


Рис. 91

$$\Delta r = -r \Delta\varphi \operatorname{ctg} \alpha.$$

Переход к бесконечно малым приращениям дает дифференциальное уравнение

$$dr(\varphi) = -r(\varphi) \operatorname{ctg} \alpha \cdot d\varphi.$$

Его решение запишем в виде

$$r(\varphi) = r_0 \cdot e^{-\varphi \operatorname{ctg} \alpha}.$$

Полученное выражение описывает уравнение так называемой логарифмической спирали и, кстати, подразумевает, что расстояние  $r$  стремится к нулю только после поворота на бесконечно большой угол  $\varphi$ .

Найдем длину этой спирали. Используя выражение для  $r(\varphi)$ , элемент дуги  $dl$  можно записать так:

$$dl = \left( \frac{r_0}{\sin \alpha} e^{-\varphi \operatorname{ctg} \alpha} \right) d\varphi.$$

Это уравнение легко интегрируется. В результате получаем выражение для длины дуги  $l(\varphi)$  для любого угла  $\varphi$  поворота радиуса-вектора  $\vec{r}$ :

$$l(\varphi) = \frac{r_0}{\cos \alpha} (1 - e^{-\varphi \operatorname{ctg} \alpha}).$$

Подставим данные задачи:

$$l(\varphi) = \frac{a/\sqrt{3}}{\sqrt{3}/2} (1 - e^{-\varphi \operatorname{ctg} \alpha}) = \frac{2}{3} a (1 - e^{-\varphi \operatorname{ctg} \alpha}).$$

Отсюда следует, что длина траектории улитки равна  $(2/3)a = 40$  см только при  $\varphi = \infty$ . Это доказывает, что улитки точечных размеров, приближаясь к центру треугольника и друг к другу, поворачиваются вокруг центра треугольника бесконечное число раз со все увеличивающейся угловой скоростью.

*Примечание.* Ночные насекомые пытаются следовать прямыми курсами полета, сохраняя постоянное направление относительно отдаленного источника света (например, Луны). Если же в качестве ориентира движения оказывается близлежащая лампа, то они летят к опасности по сжимающимся спиральным траекториям, не понимая того, что рано или поздно ударятся о лампу, так как ни насекомые, ни лампа не являются точечными.

**Р2.** Средняя скорость движения предмета равна 0,5 м/с. Считая замедление равномерным, среднюю скорость  $v_{\text{ср}}$  вычисляем по формуле

$$v_{\text{ср}} = \frac{v_{\text{н}} + v_{\text{к}}}{2},$$

где  $v_{\text{н}}$  и  $v_{\text{к}}$  — начальная и конечная скорости соответственно. Получается, что начальная скорость предмета не может быть больше чем 1 м/с, так как  $v_{\text{к}} \geq 0$ . Из этого следует, что скорость тела уменьшается за время движения максимум на 1 м/с. Таким образом, абсолютное значение его ускорения не больше 0,5 м/с<sup>2</sup>, что составляет 1/20 ускорения свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ . Поэтому коэффициент трения скольжения между предметом и поверхностью стола не может быть больше чем 0,05. Это намного меньше коэффициентов трения между обычными материалами, так что, скорее всего, предмет не скользит, а целиком или частично катится.

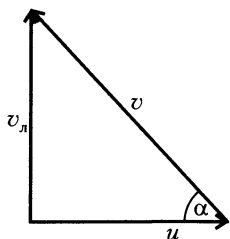


Рис. 92

**Р3.** а) Самый короткий путь в случае, когда  $u < v$ , это движение по перпендикуляру к берегу. При этом не происходит смещения лодки ни вниз, ни вверх по течению реки.

Скорость движения лодки  $v_{\text{л}}$  относительно неподвижных берегов есть векторная сумма скорости лодки в стоячей воде  $v$  и скорости реки  $u$ . Чтобы лодка перемещалась по перпендикуляру к берегу, необхо-



дим направит ее под углом  $\alpha$  к берегу против течения (рис.92), который находится из прямоугольного треугольника по формуле

$$\alpha = \arccos \frac{u}{v} = \arccos \frac{2}{3} = 48^\circ.$$

В этом случае скорость при переправе окажется равной

$$v_n = \sqrt{v^2 - u^2} = \sqrt{5} \text{ м/с} \approx 2,2 \text{ м/с}.$$

б) При условии, что  $v < u$ , лодка будет смещаться вниз по течению, даже если лодочник будет грести против течения. Всевозможные направления и величины скорости  $\vec{v}_л$ , с которой он может перемещаться относительно берега, определяются из векторной диаграммы на рисунке 93. Постоянный вектор скорости реки  $\vec{u}$  изображается вектором  $AO$ , из конца которого

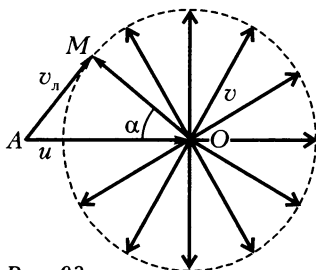


Рис. 93

выходят векторы скорости лодки  $\vec{v}$  во всевозможных направлениях, прибавляя все возможные скорости лодки в неподвижной воде к скорости реки. Множество точек на окружности радиусом  $v$  является множеством концов возможных векторов скоростей  $\vec{v}_л$  перемещения лодки относительно неподвижных берегов.

Из рисунка следует, что при любом векторе  $\vec{v}_л$ , лежащем выше диаметра окружности, лодочник может переправиться на другой берег. Кроме того, понятно, что чем больше угол между результирующей скоростью и скоростью реки, тем на меньшее расстояние вдоль реки произойдет смещение лодки. На основе этих рассуждений приходим к выводу, что вектор скорости  $\vec{v}_л$  должен лежать на касательной к окружности (см. рис.93). Таким образом, получаем, что вектор  $\vec{v}$  должен быть направлен навстречу течению реки под углом  $\alpha$ , который определяется из треугольника  $AOM$  следующим образом:

$$\alpha = \arccos \frac{v}{u} = \arccos \frac{3}{4} = 41,4^\circ,$$

а скорость лодки относительно берега вычисляется по формуле

$$v_n = \sqrt{u^2 - v^2} = \sqrt{7} \text{ м/с} \approx 2,6 \text{ м/с}.$$

Перемещение лодки  $x$  вдоль берега легко выражается через ширину реки  $l$ :

$$x = l \frac{u - v \cos \alpha}{v \sin \alpha} = l \frac{4 - 3 \cdot 3/4}{3 \cdot \sqrt{7}/4} = \frac{\sqrt{7}}{3} l = 0,88 l.$$

Кроме того, легко понять, что путь, пройденный лодкой, равен  $(4/3)l$ .

**Р4.** Пусть передний конец движущейся части ковра в некоторый момент времени  $t$  имеет координату  $x$  (рис.94). Из рисунка видно, что другой конец движущейся части (в данный момент он

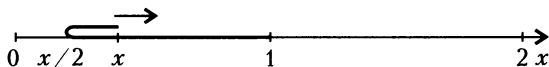


Рис. 94

еще неподвижен) имеет координату  $x/2$ . Следовательно, для координаты центра масс получаем:  $x_{\text{ц}} = (3/4)x$ . Хотя для переднего конца ковра, по условию, скорость  $v = dx/dt = 1$ , скорость центра масс движущейся части составляет только

$$v_{\text{ц}} = \frac{dx_{\text{ц}}}{dt} = d \frac{(3/4)x}{dt} = \frac{3}{4}.$$

Так как импульс  $p$  движущейся части ковра равен  $mv$ , где скорость  $v = 1$ , а масса  $m$  увеличивается равномерно со временем, сила  $F$ , действующая на перемещающуюся часть, равна

$$F = \frac{dp}{dt} = v \frac{dm}{dt} + m \frac{dv}{dt} = 1 \cdot \frac{dm}{dt} + 0.$$

Скорость изменения массы  $dm/dt$  можно найти с помощью следующего рассуждения. Во-первых, она постоянна, а во-вторых, вся масса приходит в движение тогда, когда передний конец окажется на расстоянии, в два раза большем длины ковра, масса которого  $m$ . Из этого следует, что  $dm/dt = 1/2$ , а значит, сила  $F = 1/2$ .

*Примечания.* а) Центр масс движущейся части ковра, сначала находившийся в начале координат:  $x_{\text{ц}} = 0$ , спустя две единицы времени имеет координату  $x_{\text{ц}} = 3/2$ . Это подтверждает, что скорость центра масс движущейся части ковра равна  $3/4$ .

б) Следует обратить внимание на то, что импульс  $p = mv$  движущейся части ковра не равен произведению массы  $m$  на скорость ее центра масс  $v_{\text{ц}}$ .

в) Кажется правильным попробовать найти минимальную силу  $F$ , необходимую для приведения ковра в движение, через работу  $A$  силы  $F$  на пути  $2L$ , где  $L$  – длина ковра ( $L = 1$ ). Закон сохранения механической энергии в этом случае дает  $A = F \cdot 2L = mv^2/2$ . Однако сила в этом случае окажется равной только  $1/4$ , что в два раза меньше результата, полученного ранее. Ошибка заключается в том, что часть работы тратится на

неупругие взаимодействия, которые происходят, когда движущаяся часть ковра рывком приводит следующую его часть в движение. Половина работы превращается в кинетическую энергию ковра, а другая половина рассеивается в виде тепла.

**Р5.** Согласно условию задачи, четыре прямые линии  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  находятся в одной плоскости и определенно пересекаются попарно в пяти точках (рис.95).

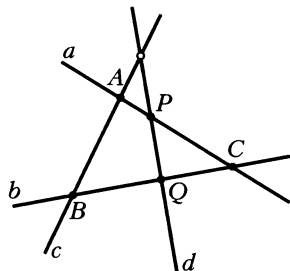


Рис. 95

**Решение 1.** Обозначим эти точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $P$  и  $Q$ . Из построения на рисунке можно сделать вывод, что если прямые  $c$  и  $d$  еще не пересеклись, то они обязательно пересекутся, и шестое пересечение определенно произойдет. Но отсюда еще не следует обязательность встречи.

**Решение 2.** Поскольку пять встреч черепашек уже произошли, обязательно найдется черепашка, которая участвовала в трех встречах. Обозначим ее  $\alpha$ . Представим себе всю картину движения, сидя на спине черепашки  $\alpha$ , т.е. выберем систему отсчета, связанную с этой черепашкой. Три другие черепашки – обозначим их  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  – уже встретились с черепашкой  $\alpha$ , поэтому их траектории проходят через одну и ту же точку (место встречи с черепашкой  $\alpha$ ). Более того, одна из этих черепашек, например  $\beta$ , должна была участвовать во встречах с оставшимися двумя другими черепашками (но не в момент своей встречи с  $\alpha$ ). Это возможно, если в системе отсчета, связанной с черепашкой  $\alpha$ , все траектории черепашек  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  находятся на одной прямой. Следовательно, и черепашки  $\gamma$  и  $\delta$ , двигаясь по одной и той же прямой, могли бы встретиться. А произойдет ли встреча или нет, зависит от начальной конфигурации движущейся системы черепашек. Например, черепашка  $\gamma$ , имея большую скорость, чем  $\delta$ , ее уже может опережать.

**Р6.** Работа по преодолению силы тяжести пропорциональна высоте подъема центра масс. Центр масс червя, свернутого вдвое, расположен в середине любой половины, т.е. отстоит на четверть длины червя вниз от вершины стены – из рисунка 96 это хорошо видно. Таким образом, центр масс тонкого плоского червя перемещается на 5 см вверх по стене, в то время как центр масс толстого перемещается на 7,5 см.

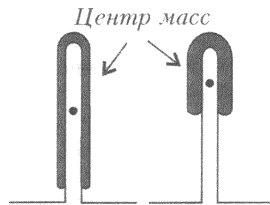


Рис. 96

Отсюда получаем, что работы, проделанные тонким и толстым червями, относятся как 2 к 3.

*Примечание.* Центр масс червя не всегда находится в одном и том месте относительно червя – он может быть в разных точках червя и даже вне его. Так, центр масс прямого червя, очевидно, лежит в его центре, а центр массы червя, свернутого вдвое, – в точке, соответствующей четверти его длины. Таким образом, центр масс гибкого тела не остается в фиксированной точке в пределах тела, его относительное положение может изменяться. Этот принцип используется прыгунами в высоту – когда тело прыгуна выгибается над перекладиной, его центр масс остается ниже ее (см. также задачу 32).

**Р7. а)** Пусть  $k$  – упругость троса,  $l_0$  – его длина в нерастянутом состоянии. Максимальная длина троса  $l_1$  оказалась равной

$$l_1 = h - h_0 = 23 \text{ м},$$

в то время как в равновесии под нагрузкой длина  $l_2$  троса равна

$$l_2 = l_1 - \Delta h = 15 \text{ м}.$$

Учтем, что в верхнем (исходном) и нижнем положениях прыгун не имел кинетической энергии, поэтому в максимально растянутом состоянии упругая энергия троса равна изменению потенциальной энергии прыгуна. Пренебрегая массой троса и полагая, что центр масс прыгуна находится на середине его высоты, запишем

$$mgh = \frac{k(l_1 - l_0)^2}{2}.$$

Кроме того, в состоянии равновесия

$$mg = k(l_2 - l_0).$$

При делении этих двух уравнений друг на друга мы получаем для  $l_0$  квадратное уравнение

$$l_0^2 + 2(h - l_1)l_0 + (l_1^2 - 2hl_2) = 0,$$

или

$$l_0^2 + 4l_0 - 221 = 0,$$

откуда находим, что  $l_0 = 13 \text{ м}$ .

Определим еще упругость  $k$  троса (для человека массой  $m = 100 \text{ кг}$ ):

$$k = \frac{mg}{l_2 - l_0} = \frac{1000 \text{ Н}}{2 \text{ м}} = 500 \text{ Н/м}.$$

б) Когда падающий прыгун достигает самой высокой скорости, его ускорение становится равным нулю. То же наблюдается

при прохождении колеблющимся телом положения равновесия. В нашем случае это происходит при  $l = l_2$ . Используя закон сохранения механической энергии, можем записать

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{k(l_2 - l_0)^2}{2} = mg(l_2 + h_0).$$

Подставив в это уравнение выражение для упругости  $k$  из пункта а), получим для максимальной скорости  $v$  при прохождении положения равновесия такое выражение:

$$v = \sqrt{g(l_2 + l_0 + 2h_0)} = \sqrt{10 \cdot 32} \text{ м/с} \approx 17,8 \text{ м/с} \approx 64 \text{ км/ч}.$$

Если не пользоваться аналогией с колебательным движением, то из закона сохранения энергии найдем, что максимальная скорость прыгуна  $v = 18 \text{ м/с} \approx 65 \text{ км/ч}$ .

При вычислении максимального ускорения необходимо определить максимальную силу, действующую на прыгуна в нижней точке. Так как самое большое растяжение троса (10 м) в пять раз больше растяжения в положении равновесия (2 м), то самая большая сила натяжения троса равна  $5mg$ . Так что максимальная равнодействующая сила, действующая на прыгуна, равна  $4mg$ , а его максимальное ускорение равно, соответственно,  $a = 4g = 40 \text{ м/с}^2$ .

**Р8.** Пусть  $S$  – площадь основания и  $H$  – высота айсберга,  $s$  и  $h$  – площадь основания и высота выступающей части айсберга над поверхностью воды,  $\rho_{\text{л}}$  и  $\rho_{\text{в}}$  – плотности льда и воды соответственно. Тогда полный объем  $V_0$  айсберга и объем  $V$  его выступающей части будут равны

$$V_0 = \frac{SH}{3} \text{ и } V = \frac{sh}{3}.$$

Ясно, что площадь любого горизонтального сечения пирамиды пропорциональна квадрату соответствующей высоты, откуда следует, что

$$\frac{s}{S} = \left(\frac{h}{H}\right)^2, \text{ и } \frac{V}{V_0} = \left(\frac{h}{H}\right)^3.$$

Айсберг будет плавать, если выталкивающая сила равна его силе тяжести:

$$\rho_{\text{в}} g \left( \frac{SH}{3} - \frac{sh}{3} \right) = \rho_{\text{л}} g SH,$$

или

$$\rho_{\text{в}} (H^3 - h^3) = \rho_{\text{л}} H^3.$$

Отсюда, в частности, можно найти полную высоту айсберга:

$$H = h \sqrt[3]{\frac{\rho_v}{\rho_v - \rho_l}}.$$

Если айсберг утопить на небольшую величину  $x$ , то дополнительный погруженный объем будет равен  $xS(h/H)^2$ , а если его умножить на  $\rho_v g$ , то получим дополнительную выталкивающую силу  $\Delta F_{\text{выт}}$ , которая приводит айсберг к колебаниям. Поскольку масса  $M$  айсберга равна  $\rho_l SH/3$ , угловая частота колебаний  $\omega$  определяется по формуле

$$\omega^2 = \frac{\Delta F_{\text{выт}}/x}{M} = 3g \frac{\rho_v}{\rho_l} \frac{h^2}{H^3} = 3g \frac{\rho_v - \rho_l}{h\rho_l}.$$

Период колебания айсберга  $T$  после подстановки данных числовых значений оказывается равным

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{h\rho_l}{3g(\rho_v - \rho_l)}} \approx 10,9 \text{ с}.$$

**Р9.** Прежде всего, обратим внимание на то, что в первом случае парковки на тротуаре правая передняя (пп) пружина подвески будет сжата больше, чем при расположении автомобиля на горизонтальной поверхности. Мы можем измерить как изменение сжатия пружин подвесок, так и повышение корпуса автомобиля относительно его нормального расположения. Будем считать изменение сжатия положительным, если пружина сжимается больше, чем в нормальном состоянии автомобиля.

При равновесии автомобиля суммарный момент сил, действующих в четырех пружинах, должен быть равен нулю относительно любой неподвижной оси. Выберем в качестве такой оси диагональ прямоугольника, образованного колесами. Тогда изменения сжатия в противоположных концах одной и той же диагонали должны быть равны. Поэтому правая передняя (пп) и левая задняя (лз) пружины подвесок будут дополнительно сжаты одинаково, например на некоторую величину  $x$ . При этом левая передняя (лп) и правая задняя (пз) пружины одинаково удлинятся тоже на величину  $x$ , т.е. каждая из них увеличит сжатие на  $-x$ . Это равенство величин изменений сжатий следует из неизменности веса автомобиля (если две из четырех пружин дополнительно напряжены, то две другие — ослаблены).

Теперь можно приступить к самому решению. Удобно воспользоваться рисунком 97. Здесь изображена диагональ автомобиля лз — пп при расположении автомобиля на горизонтальной поверхности в виде прямой  $AB$ . Прямая  $AB_1$  изображает эту ось

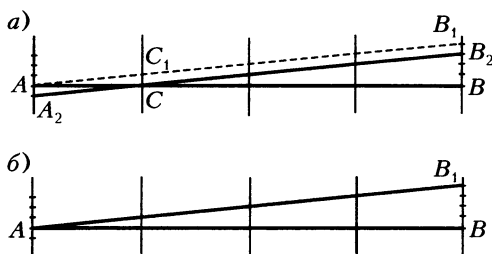


Рис. 97

в случае, если бы пружинам подвесок автомобиля запретили изменять свои длины при парковке на тротуаре. Прямая  $A_2B_2$  (см. рис. 97,а) отображает реальное расположение диагонали автомобиля при наезде передним правым колесом на препятствие высотой 8 см. (Горизонтальные штрихи слева и справа, а также вертикальные тонкие линии изображены для убедительности решения.)

Прямая  $AB_1$  должна быть параллельно сдвинута вниз так, чтобы ее смещение по вертикали стало равно оставшемуся расстоянию середины диагонали  $C_1$  до ее исходного состояния  $C$  при горизонтальном расположении автомобиля. Это смещение и будет равно  $x$ . Из построений ясно, что  $x = 2$  см. Таким образом, правая передняя часть автомобиля будет поднята на высоту 6 см, левая задняя часть будет опущена на 2 см, а левая передняя и правая задняя части будут подняты на 2 см.

Если автомобиль припаркован на тротуаре обоими правыми колесами, то все пружины изменяют свое сжатие одинаково. Раз одинаково, то, ввиду того что вес машины не изменился и угол крена мал, изменения сжатия пружин окажутся равными нулю. Из этого следует, что расстояние по высоте между дорогой и левым бортом машины равно расстоянию по высоте от бордюра до правого борта. Иными словами, правый и левый борта машины находятся на одинаковых расстояниях от опор. Это значит, что правый борт машины поднимется на 8 см (и займет положение  $AB_1$  на рисунке 97,б).

Мы исследовали только относительное смещение корпуса автомобиля до и после парковки на тротуаре, но можно показать, что рассмотренные результаты не зависят от числа и положений сидящих в автомобиле людей (разумеется, если центр тяжести системы остается на месте).

*Примечание.* В приведенном решении небольшое смещение центра тяжести корпуса автомобиля в сторону при наклоне не учитывалось.

**Р10.** Рисунок 98,а иллюстрирует положение Жана Вальжана на стене в некоторый момент времени, а на рисунке 98,б показаны действующие на него силы. Это его сила тяжести  $m\vec{g}$ ,

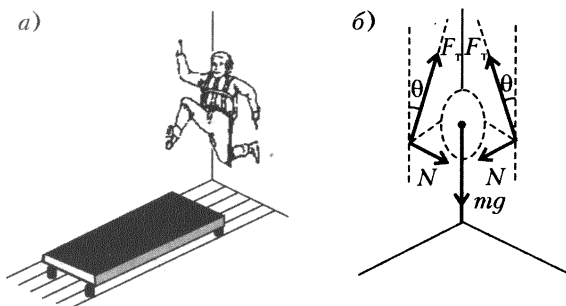
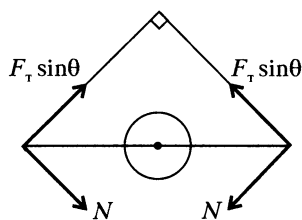


Рис.98

нормальные реакции стен  $\vec{N}$  и силы трения покоя  $\vec{F}_t$ , действующие на его конечности. Подчеркнем, что силы  $\vec{N}$  перпендикулярны стенам, а силы  $\vec{F}_t$  лежат в их плоскостях.

Пусть силы трения покоя составляют одинаковые углы  $\theta$  с вертикалями. Тогда условия статического равновесия можно записать так (рис.99):



Вид сверху

Рис.99

$$mg = 2F_t \cos \theta, \quad N = F_t \sin \theta.$$

Из этих уравнений следует, что

$$N = \frac{mg \operatorname{tg} \theta}{2}, \quad F_t = \frac{mg}{2 \cos \theta}.$$

Таким образом, сила, которую необходимо развивать на каждой стене Жану Вальжану, определяется вы-

ражением

$$F^2 = N^2 + F_t^2 = \left( \frac{mg \operatorname{tg} \theta}{2} \right)^2 + \left( \frac{mg}{2 \cos \theta} \right)^2 = \left( \frac{mg}{2} \right)^2 \frac{\sin^2 \theta + 1}{\cos^2 \theta}.$$

В то же время, сила трения  $F_t$  выражается через коэффициент трения  $\mu$  по формуле

$$F_t \leq \mu N.$$

Учитывая это неравенство, из условия статического равновесия получаем следующие неравенства для  $\sin \theta$  и  $\cos \theta$ :

$$\sin \theta \geq \frac{1}{\mu}, \quad \cos \theta \leq \frac{\sqrt{\mu^2 - 1}}{\mu}.$$



Теперь из выражения для силы  $F$  находим ее минимальное значение:

$$F_{\min} = \frac{mg}{2} \sqrt{\frac{\mu^2 + 1}{\mu^2 - 1}}.$$

Это выражение показывает, что коэффициент трения покоя должен быть больше единицы, чтобы Жан Вальжан не мог упасть со стены. Далее, видим, что если коэффициент трения  $\mu$  устремить к бесконечности, то сила  $F_{\min}$  превращается в половину силы тяжести. Это соответствует тому, что Жан Вальжан должен как бы приклеиваться к стене.

**Р11.** Если трение покоя достаточно большое, то сфера *скользит* по наклонной плоскости не будет. Однако этого еще недостаточно – для равновесия необходимо также, чтобы сфера не могла *катиться* вниз по наклонной плоскости.

Сферическая оболочка состоит из двух полусфер с разными плотностями, что подразумевает неоднородное распределение масс. Если расстояние между ее центром масс и геометрическим центром меньше  $r/2$ , где  $r$  – радиус сферы, то, какова бы ни была ориентация сферы, ее сила тяжести вызовет крутящий момент относительно точки контакта  $P$  с наклонной плоскостью (рис.100), который заставит сферу вращаться. Покажем, что такая ситуация возникает для любой сферы, состоящей из двух однородных полусфер, независимо от их плотностей.

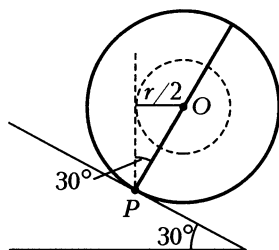


Рис. 100

Если однородную полусферу разбить на большое число слоев одной и той же толщины плоскостями, параллельными основанию полусферы, то массы всех этих слоев – ободков – будут одинаковыми. Это непосредственно следует из теоремы стереометрии о площади поверхности сферического слоя высотой  $h$ , вырезанного из сферы радиусом  $R$ : эта площадь равна  $2\pi Rh$ . Поэтому центр тяжести однородной полусферической оболочки находится на ее оси симметрии на расстоянии  $R/2$  от центра. Для двух полусфер общий центр масс будет где-то между центрами масс обеих половинок, а значит, на расстоянии, меньшем  $R/2$  от их общего центра.

Из предыдущих рассуждений следует, что сфера не может остаться в равновесии на плоскости, наклоненной под углом  $30^\circ$ .

При решении мы предположили, что трение качения маленькое, т.е. что никакой крутящий момент силы трения не может

действовать в точке  $P$ . В случае, когда поверхность полусферы шершавая, очевидно, это неправильно, так как такая сфера может удерживаться даже на почти вертикальной поверхности.

**Р12.** Введем прямоугольную систему координат, направив ось  $x$  вдоль наклонной плоскости вниз, а ось  $y$  — перпендикулярно наклонной плоскости вверх (рис.101). Тогда вектор ускорения свободного падения  $\vec{g}$  можно разложить на ускорение  $\vec{a}_x$

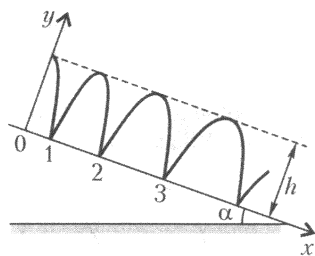


Рис. 101

вдоль оси  $x$  ( $a_x = g \sin \alpha$ ) и ускорение  $\vec{a}_y$  вдоль оси  $y$  ( $a_y = -g \cos \alpha$ ). Эти ускорения постоянны. Если считать, что при ударе энергия не теряется, то перпендикулярная плоскости составляющая скорости шарика при каждом отскоке будет одна и та же. А раз так, то и высота  $h$  подъема шарика вдоль оси  $y$ , и интервалы времени  $t_0$  между ударами о наклонную плоскость тоже будут одинаковыми.

Движение шарика вдоль оси  $x$  оказывается таким, как будто никаких ударов нет, так как мы не учитываем торможение шарика вдоль наклонной плоскости.

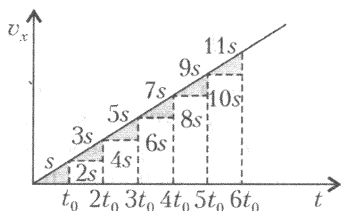


Рис. 102

Поэтому зависимость составляющей скорости шарика  $v_x$  вдоль оси  $x$  от времени  $t$  представляется прямой, тангенс угла наклона которой равен ускорению  $a_x$  (рис.102). Площадь под графиком скорости от времени, как известно, равняется пройденному пути. Из рисунка видно, что

расстояния между ударами можно записать в виде

$$s_i = s_{i-1} + 2s, \quad i = 2, 3, 4, \dots$$

Это и есть арифметическая прогрессия.

Рисунок 101 демонстрирует качественно изменение траектории полета шарика после каждого удара.

**Р13.** Пусть  $h$  — расстояние от оси вращения до середины платформы, а  $x$  — расстояние от хомяка до этой средней точки, как показано на рисунке 103. Тогда момент сил относительно оси вращения, создаваемый хомяком за счет силы тяжести, равен  $mgx$ . Это означает, что, если бы хомяк был неподвижен, платформа стала бы вращаться по часовой стрелке. Для равновесия

A free-body diagram of a particle at the bottom of a circular loop. The particle is represented by a small circle. A vertical arrow labeled  $h$  points upwards from the center of the loop to the particle. A horizontal arrow labeled  $a$  points to the right from the center of the loop to the particle. A horizontal arrow labeled  $-ma$  points to the left from the particle. A vertical arrow labeled  $mg$  points downwards from the particle.

Отсюда получаем выражение для ускорения хомяка:

$$a = -\frac{g}{h}x.$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}.$$

81

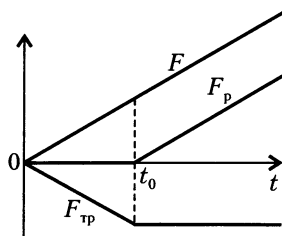


Рис. 104

видно, что велосипед стоит на месте до момента  $t_0$ , пока приложенная сила не превысит максимальную силу трения. При  $t > t_0$  велосипед будет смещаться назад, в сторону действия приложенной силы. Педаль вместе с зубчатым колесом и заднее колесо будут вращаться против часовой стрелки, причем заднее колесо будет проскальзывать (считаем, что заднее колесо находится справа от студента).

*Примечание.* Интересно обратить внимание на то, что существует такое положение педалей, при котором произвольно большая сила не приводит к перемещению велосипеда.

**Р15.** Пусть  $G$  – гравитационная постоянная,  $T$  – период обращения Земли вокруг Солнца,  $\omega$  – угловая скорость,  $m$  и  $M$  – масса Земли и Солнца,  $r$  – расстояние между их центрами. Будем считать, что  $m \ll M$  и что Земля вращается вокруг центра Солнца. Тогда можем записать уравнение движения Земли:

$$G \frac{mM}{r^2} = m\omega^2 r = m \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 r.$$

Поделим левую и правую части этого выражения на  $m$  и выразим массу Солнца через его радиус  $R$  и плотность  $\rho$ . Тогда предыдущее выражение будет иметь вид

$$G \frac{4\pi\rho R^3}{3r^2} = \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 r.$$

Отсюда получаем формулу для периода обращения любого малого тела вокруг массивного тела:

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho} \left( \frac{r}{R} \right)^3}.$$

Это выражение показывает, что период обращения планеты зависит только от плотности звезды и от отношения расстояния между космическими телами к радиусу притягивающей звезды. Следовательно, продолжительность года не изменится.

*Примечание.* Этот результат также можно получить, используя третий закон Кеплера, который записывается в виде

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM},$$

где  $a$  – большая полуось эллиптической орбиты. Если массу

Солнца выразить через его среднюю плотность, то станет ясно, что пропорциональное уменьшение линейных размеров не изменит период планет на эллиптических орбитах.

**Р16.** В предыдущей задаче было показано, что период обращения планеты вокруг Солнца зависит от плотности звезды и от отношения расстояния между телами к радиусу Солнца.

Однако это выполняется лишь при условии  $m \ll M$ . Наша задача о замене Земли фактически вторым Солнцем заставляет учитывать то, что эти два Солнца будут вращаться около центра, находящегося посередине между ними, т.е. радиус вращения каждой звезды будет равен  $r/2$ . Отсюда следует, что период обращения рассматриваемых звезд уменьшится в  $2^{3/2} \approx 2,8$  раза.

*Примечание.* При нарушении условия  $m \ll M$  в третьем законе Кеплера необходимо заменить массу звезды на сумму масс звезды  $M$  и космического тела  $m$ , вращающегося вокруг нее, т.е. более точно закон будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M+m)}.$$

**Р17.** а) Ускорение  $a$  спутника, который движется со скоростью  $v$  по круговой орбите радиусом  $R$ , находится по формуле  $a = v^2/R$ . Если  $R$  – радиус Земли (более точно – слегка большее значение), то это ускорение должно быть ускорением свободного падения  $g$ , т.е.  $a = g$ . Отсюда и определяется первая космическая скорость:

$$v_1 = \sqrt{Rg} = 7,9 \text{ км/с}.$$

С этой скоростью спутник мог бы летать вокруг Земли по круговой орбите сколь угодно долго, если бы у ее поверхности не было атмосферы.

Однако Земля сама вращается. Поэтому в зависимости от земных координат и направления запуска спутника необходимая скорость запуска отличается от  $v_1$  на величину проекции скорости поверхности Земли в месте запуска на направление скорости запуска спутника. При запуске спутника в восточном направлении скорость запуска надо уменьшить, если запуск идет в западном направлении – увеличить. Для экватора эта поправка составляет приблизительно 0,48 м/с.

б) Момент импульса спутника на полярной орбите (проходящей через полюс) относительно оси вращения Земли равен нулю. Это условие должно быть выполнено непосредственно после запуска, так как в дальнейшем момент импульса спутника

изменяться не будет. Поэтому при запуске спутников на полярные орбиты необходимо обеспечить компенсацию смещения спутника в поперечном направлении, которое зависит от широты места запуска. Самая малая поправка получается при осуществлении запуска на любом из полюсов.

Начальная скорость, необходимая для выведения спутника на полярную орбиту, в  $7,9/7,4 \approx 1,06$  раз больше по сравнению с экваториальной орбитой в сторону востока, при этом кинетическая энергия спутника должна быть в  $(1,06)^2 \approx 1,12$  раза больше.

Это различие не кажется большим, но в действительности самое небольшое увеличение скорости запуска требует огромного увеличения расхода горючего. Причина в том, что вместе со спутником происходит ускорение и самого ракетносителя вместе с горючим, масса которого существенно больше массы спутника, а количество горючего связано с конечной скоростью спутника быстро растущей экспоненциальной зависимостью.

в) Чтобы космический аппарат смог покинуть область притяжения Земли (т.е. стать спутником Солнца), необходимо ему сообщить вторую космическую скорость  $v_2 = \sqrt{2gR} = \sqrt{2}v_1 \approx 11,2$  км/с. При этом можно снова использовать вращение Земли. Так, при запуске на экваторе в восточном направлении скорость запуска относительно Земли равна примерно 10,7 км/с.

г) Земля вращается вокруг Солнца со скоростью приблизительно 30 км/с. Чтобы достичь Солнца, космический зонд нужно запустить с начальной скоростью 30 км/с (более точно – 29,5 км/с, т.е. на 0,5 км/с меньше из-за вращения Земли). Если цель состоит в том, чтобы покинуть Солнечную систему, то космический зонд должен достичь скорости в  $\sqrt{2}$  раз большей, чем 30 км/с, но из этого значения можно будет вычесть начальную скорость Земли на ее орбите. Если запуск хорошо рассчитан и направлен, тогда для запуска космического аппарата достаточной скорости порядка 12 км/с.

Таким образом, легче заставить космический зонд покинуть Солнечную систему, чем послать его на Солнце. Ситуация может быть более благоприятной, если принять во внимание возможности, предлагаемые другими планетами (Марсом, Юпитером, Сатурном и др.). Пространственный зонд, запущенный в правильное время и в правильном направлении, может быть значительно ускорен этими планетами (явление, известное как гравитационная рогатка). Разработанный таким образом простран-

ственный зонд должен только достичь Марса или Юпитера, остальное же произойдет автоматически.

**Р18.** Считается, что потенциальная энергия тела на поверхности Земли отрицательна, а на бесконечности – равна нулю. Энергия ракетного топлива, израсходованная во время действия двигателей, увеличивает полную энергию ракеты. Ракета может покинуть поле тяготения Земли, если сумма ее потенциальной и кинетической энергий станет положительной.

Однако скорость, с которой продукты сгорания падают на Землю, зависит от выбора времени работы ракетных двигателей. Действительно, если вспомогательный двигатель начинает работать, когда ракета находится на большой высоте, то продукты сгорания падают дольше и, когда они ударяются о землю, их скорость и полная энергия больше, чем для случая расходования того же топлива у поверхности Земли. Таким образом, чем раньше включен вспомогательный двигатель, тем больше энергии, приобретаемая ракетой.

Это означает, что необходимо тратить все ракетное топливо вблизи Земли и как можно быстрее, применяя как можно более жесткие условия горения.

**Р19.** При перемещении шарика центр масс системы шарик – мед тоже перемещается. Для удобства определения центра масс системы расположим ее горизонтально (рис.105). Пусть в некоторый момент времени шарик массой  $m_{\text{ш}}$  находится в точке  $A$  на расстоянии  $x$  от точки  $O$ , в которой находился бы центр масс меда массой  $M$ , если бы в нем не было стального шарика. Помещение шарика в мед, конечно же, нарушает симметрию распределения массы меда. Но мы поступим таким образом: мысленно будем считать, что часть массы шарика, равная массе меда, вытесненного шариком, остается неподвижной, а остальная часть движется. Такой подход не нарушает реальной ситуации по распределению масс в системе, однако дает возможность легко определить координату центра масс системы, т.е. точки  $C$ .

На рисунке 106 показана упрощенная ситуация. Если обозначить  $V_{\text{ш}}$  объем шарика, то эффективная масса шарика, которая участвует в движении, равна

$$m = (\rho_{\text{ш}} - \rho_{\text{м}}) V_{\text{ш}}.$$

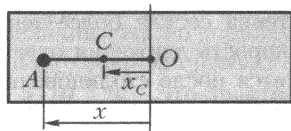


Рис. 105

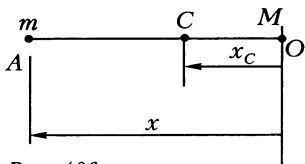


Рис. 106

Тогда из равенства моментов сил тяжести эффективного шарика и меда получаем уравнение

$$(x - x_C)m = Mx_C,$$

откуда находим

$$x_C = \frac{xm}{m + M}.$$

Дифференцируя это выражение, получаем скорость центра масс:

$$v_C = \frac{vm}{m + M}$$

и полный импульс системы:

$$p = v_C(m + M) = vm = v(\rho_{\text{ш}} - \rho_{\text{м}})V_{\text{ш}} = v\rho_{\text{ш}}V_{\text{ш}} - v\rho_{\text{м}}V_{\text{м}}.$$

Первый член полученного выражения это – импульс шарика, второй член – импульс меда. Мы видим, что импульс меда равен импульсу медового шарика, движущегося навстречу стальному с такой же скоростью. Таким образом, импульс меда равен

$$-v\rho_{\text{м}}V_{\text{ш}} = -2 \text{ г} \cdot \text{см} \cdot \text{с}.$$

**Р20.** Средняя кинетическая энергия молекул газа пропорциональна квадрату их скорости  $v$ . Внутренняя энергия идеального газа пропорциональна его температуре  $T$ . Поэтому  $v^2 \sim T$ . Если стенка сосуда более теплая, чем газ, т.е.  $T_1 > T$ , то средняя скорость движения отлетающих от стенки молекул газа увеличится после столкновения (стенка нагревает газ). Если стенка более холодная, чем газ, т.е.  $T_1 < T$ , то положение обратное: молекулы отлетают с более низкой скоростью (стенка охлаждает газ).

С молекулярной точки зрения, газы оказывают давление на стенки сосуда из-за изменения импульса молекул, которые ударяются о стенку и отскакивают от нее. Изменение импульса молекул, отскакивающих от теплой стенки, больше изменения импульса молекул, отскакивающих от холодной. Таким образом, газ оказывает более высокое давление на теплую стенку, чем на холодную.

*Примечание.* Это явление объясняет неожиданное вращение радиометра – «световой вертушки» с легкими лопастями, одна сторона которых блестящая, а другая зачерненная. Радиометр при облучении его светом начинает вращаться, при этом крутится блестящей стороной вперед. Почему так происходит, если ясно, что давление света на блестящую поверхность больше, чем на черную?



Дело оказывается в том, что 1) черная поверхность всегда нагрета больше, чем блестящая; 2) световой импульс очень мал; 3) в сосуде, где находится наш радиометр, есть достаточно много молекул остаточного газа. Все это приводит к тому, что в создании вращения радиометра участвуют молекулы газа, а они больше давят на горячую поверхность. Если в сосуде обеспечить сверхвысокий вакуум, то вертушка будет крутиться черной поверхностью вперед.

**Р21.** В результате теплового расширения размер обоих шаров увеличивается. Центр масс шара, находящегося на подставке, поднимается, в то время как центр шара, висящего на нити, опускается (рис.107). Таким образом, потенциальная энергия первого шара увеличивается, а второго уменьшается. В результате получаем, что тепло, сообщаемое шарам, идет не только на увеличение их внутренней энергии, но и на совершение работы по поднятию или опусканию их центров масс. Из этого следует, что шар, подвешенный на нити, будет иметь большую температуру, чем тот, который находится на подставке.

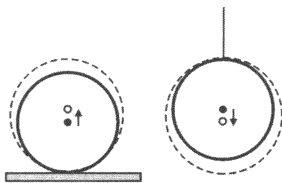


Рис. 107

Стоит дать числовую оценку. Если температура двух железных шаров, каждого радиусом 10 см, увеличивается по порядку величины на  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ , то из-за рассмотренного эффекта разность температур наших шаров составит  $\Delta T \approx 5 \cdot 10^{-6}\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Это практически незаметно.

**Р22.** Для количественной оценки предположим, что сопротивления лампочек не зависят от напряжений на них. Это далеко от истины, но дает правильное качественное заключение. Пусть  $U$  – напряжение в сети, и  $P_i$  – номинальная мощность  $i$ -й лампочки. Тогда сопротивление  $R_i$   $i$ -й лампочки находится по формуле

$$R_i = \frac{U^2}{P_i}.$$

По договору друг с другом студенты должны были включить последовательно две одинаковые лампочки мощностью  $P_0$  и сопротивлением  $R_0 = U^2/P_0$  каждая. В этом случае каждый студент получал бы мощность

$$\frac{U^2/(2R_0)}{2} = \frac{P_0}{4} = 25\text{ Вт},$$

но света в этом случае было бы явно мало для работы над конспектами.

Но студенты еще и схитрили и вкрутили разные лампочки:  $P_A = 2P_0$  и  $P_B = P_0/2$ , что привело к перераспределению напряжения. Так как сопротивления лампочек теперь равны  $R_A = R_0/2$  и  $P_B = 2R_0$ , то напряжения на лампочках стали

$$U_A = U \frac{R_0/2}{5R_0/2} = \frac{U}{5} \text{ и } U_B = U \frac{2R_0}{5R_0/2} = \frac{4U}{5}.$$

В результате мощности, выделяемые в комнатах, оказались такими:

$$P_A = \frac{(U/5)^2}{R_0/2} = \frac{8}{25} \frac{P_0}{4} = 8 \text{ Вт}$$

и

$$P_B = \frac{(4U/5)^2}{2R_0} = \frac{32}{35} \frac{P_0}{4} = 32 \text{ Вт}.$$

Суммарная мощность теперь равна 40 Вт, что меньше, чем в случае договора. Но студент А, вообще ничего не видя (8 Вт существенно меньше 25 Вт), платит за 20 Вт. Студент Б может рассматриваться двойным победителем: он получает 32 Вт (32 больше 25), но платит только за 20 Вт.

Таким образом, оба студента слабые, так как получили совсем не то, на что рассчитывали, и вряд ли смогут хорошо подготовиться к сессии при такой плохой освещенности.

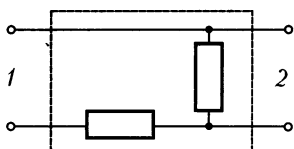


Рис. 108

**Р23.** Условию задачи соответствует простая цепь, собранная по схеме на рисунке 108. Она состоит из двух одинаковых резисторов.

**Р24.** В первом приближении период колебаний маятника зависит от расстояния между его центром масс и точкой подвеса. Чем больше это расстояние, тем больше период колебаний. Для простоты будем считать, что центры масс ведра и налитой в него воды совпадают с центрами соответствующих цилиндров. Таким образом, при вытекании воды ее центр масс понижается.

Центр масс системы в самом начале совпадал с центром масс ведра. По мере вытекания воды центр масс системы сначала понижается, приводя к увеличению периода колебаний, а затем, когда воды остается мало, центр масс системы начнет повышаться (этот момент зависит от конкретных условий, зависящих от геометрии и массы ведра и воды) и снова достигнет исходного положения.

Итак, при выливании воды из ведра период колебаний сначала увеличивается, в некоторый момент достигает максимального значения, после чего начинает уменьшаться, приближаясь к исходному значению.

*Примечание.* Надо отметить, что вторая стадия процесса происходит существенно быстрее, чем первая. Как будет показано в следующей задаче, период достигнет максимума, когда общий центр масс окажется на поверхности воды.

**Р25.** Очевидно, что первая порция налитой в мензурку воды находится ниже центра тяжести пустой мензурки и поэтому понижает общий центр тяжести. По мере заполнения мензурки водой так будет продолжаться до тех пор, пока центр масс системы не окажется на поверхности воды (рис. 109). Действительно, любое малое добавление воды приводит к поднятию центра масс системы. Так как для максимальной стабильности общий центр тяжести должен лежать как можно ниже, то задача качественно решена.

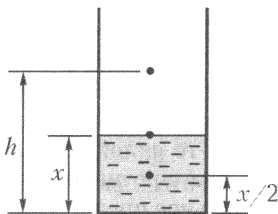


Рис. 109

Решим теперь задачу количественно. Пусть  $M$  – масса мензурки,  $r$  – ее радиус,  $h$  – расстояние от дна мензурки до ее центра масс,  $x$  – высота столба воды и  $m = \pi r^2 \rho x = qx$ , где  $q = \pi r^2 \rho$ , – масса воды. Запишем уравнение равновесия относительно центра масс:

$$M(h - x) = \frac{mx}{2} = \frac{qx^2}{2}.$$

Получили квадратное уравнение для определения высоты  $x$  столба воды:

$$(q/2)x^2 + Mx - Mh = 0,$$

откуда находим

$$x = \frac{M}{q} \left( \sqrt{1 + \frac{2qh}{M}} - 1 \right) \approx 5,59 \text{ см}.$$

**Р26.** Заметим, что уровень супа в кастрюле обязательно ниже поверхности воды (ведь сама кастрюля тоже весит, да и суп тяжелее воды).

Предположим сначала, что центр масс кастрюли остается на той же самой высоте, что и был первоначально. Тогда кастрюля только поворачивается вокруг своего центра (и, возможно, перемещается боком), но не опускается глубже в воду. При этих обстоятельствах край кастрюли окажется ниже уровня поверхности

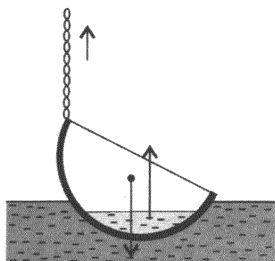


Рис. 110

сти воды на противоположной цепи стороне, и вода затечет в кастрюлю.

Теперь мы докажем, что этого не может быть. Для наглядности воспользуемся рисунком 110.

С одной стороны, выталкивающая сила, действующая на кастрюлю в предполагаемой ситуации, остается той же самой, как в начале, т.е. она равна полному весу кастрюли и супа. Таким образом, со стороны цепи как бы не

прикладывается к кастрюле никакой силы.

С другой стороны, когда левый край кастрюли поднимается, центр масс кастрюли уже не находится на линии действия выталкивающей силы, и крутящие моменты могут быть сбалансированы только тогда, когда цепь тянет кастрюлю вверх с какой-то силой.

Два противоречащих утверждения показывают, что наше начальное предположение было неправильным. Геометрический центр кастрюли не может оставаться в том же самом месте, а должен подняться (так как выталкивающая сила уменьшится, если цепь тянет кастрюлю вверх). Из этого следует, что даже самая низкая точка края кастрюли должна остаться выше поверхности воды.

В принципе, допускается возможность, когда суп будет вытекать в воду. Но это может произойти, только если уровень супа в кастрюле выше уровня воды в озере, т.е. если плотность супа меньше плотности воды. В жизни такого не бывает.

**Р27.** Сделаем некоторые замечания:

1) Плотность  $\rho_{\text{ш}}$  материала шара должна быть меньше плотности  $\rho$  воды, иначе он сам ни при каких обстоятельствах всплыть не может. Отсюда следует, что  $m < \rho V_0$ , где  $V_0$  — полный объем шара.

2) Чем меньше плотность  $\rho_{\text{ш}}$  материала шара, тем меньше толщина  $h$  слоя воды, которая сможет удержать его внизу.

3) Поверхность воды может быть как ниже выступающей части шара над уровнем отверстия ( $\rho_{\text{ш}}$  существенно меньше  $\rho$ ), так и выше шара ( $\rho_{\text{ш}}$  немного меньше  $\rho$ ).

Рассмотрим силы, действующие на шар. Это сила тяжести  $mg$ , выталкивающая сила воды  $F$  и нормальная сила реакции  $N$  со стороны краев отверстия. Когда выталкивающая сила сравняется с силой тяжести, нормальная сила реакции станет нулевой, и шар оторвется от дна.

Выталкивающая сила, действующая на шар, полностью находящийся в воде, равна  $F_0 = \rho g V_0$ . В нашем случае из этой силы необходимо исключить выталкивающую силу, которая действовала бы на нижний шаровой сегмент, находящийся ниже отверстия вне воды, и силу, которая действовала бы на нижнюю плоскость шара без этого сегмента, зависящую от толщины  $h$  слоя воды над этой плоскостью. Таким образом, если толщина  $h$  слоя воды больше  $R + \sqrt{R^2 - r^2}$  (рис.111), то выталкивающая сила  $F$  будет равна

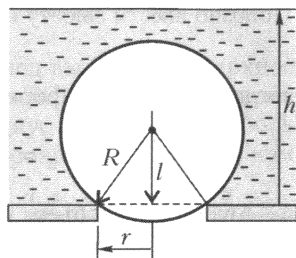


Рис. 111

$$F = F_0 - \rho g V_n - \rho g h \pi r^2,$$

где  $V_n$  – объем нижнего сегмента, свободного от воды.

Условие равновесия шара у отверстия можно записать в виде

$$N = (F_0 - \rho g V_n - \rho g h \pi r^2) - mg.$$

В момент отрыва шара от отверстия  $N = 0$ , т.е.

$$mg = F_0 - \rho g V_n - \rho g h_0 \pi r^2.$$

Отсюда находим толщину  $h_0$  слоя воды в момент отрыва шара:

$$h_0 = \frac{\rho V_0 - \rho V_n - m}{\rho \pi r^2}.$$

Для очень легкого шара необходимо учесть убыль объема  $V_b$  верхнего сегмента, выступающего над поверхностью воды (рис.112). Момент отрыва шара в этом случае описывается уравнением

$$mg = F_0 - \rho g V_n - \rho g V_b - \rho g h_0 \pi r^2,$$

где объем  $V_b$  тоже зависит от толщины  $h_0$  слоя воды. Из-за этого решение уравнения относительно  $h_0$  существенно усложняется (как увидим ниже, это кубическое уравнение).

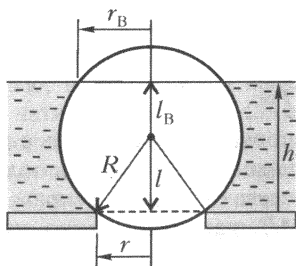


Рис. 112

Объем нижнего шарового сегмента (при толщине сегмента меньше  $R$ ) равен

$$V_n = \frac{\pi}{3} \left( 2R^3 - (2R^2 + r^2) \sqrt{R^2 - r^2} \right).$$

Полезно ввести высоту  $l$  центра шара над плоскостью отверстия:

$$l = \sqrt{R^2 - r^2},$$

тогда предыдущая формула упростится:

$$V_{\text{н}} = \frac{\pi}{3} (2R^3 - l(2R^2 + r^2)).$$

Аналогично, объем  $V_{\text{в}}$  верхнего шарового сегмента равен

$$V_{\text{в}} = \frac{\pi}{3} (2R^3 - l_{\text{в}}(2R^2 + r_{\text{в}}^2)),$$

где

$$r_{\text{в}}^2 = R^2 - l_{\text{в}}^2, \text{ а } l_{\text{в}} = h - l = h\sqrt{R^2 - r^2}.$$

Для анализа результатов рассмотрим зависимость выталкивающей силы  $F$  от толщины  $h$  слоя воды в преобразованном виде:

$$F(h) = \frac{\pi \rho g}{3} (3l^2(h-l) + 2l^3 - (h-l)^3), \text{ если } h \leq l + R,$$

и

$$F(h) = \frac{\pi \rho g}{3} (2(R^2 + l^3) - 3(h-l)(R^2 - l^2)), \text{ если } h \geq l + R.$$

График функции  $F(h)$  показан на рисунке 113. Первая часть функции – это кривая третьего порядка, имеющая максимум при  $h = 2l$ , вторая – прямая с отрицательным наклоном. Одна линия переходит в другую при  $h = R + l$ .

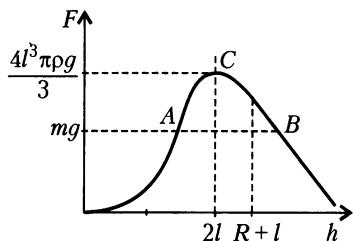


Рис. 113

График  $F(h)$  позволяет определить толщину слоя воды, при которой всплывает конкретный шар при любых условиях, будь он очень легкий или тяжелый. Для этого достаточно провести горизонталь с ординатой, равной силе тяжести заданного шара. При этом получаем две точки пересечения. Ясно, что слева от точки  $A$  и справа от точки  $B$  шар не всплывает, на отрезке  $AB$  шар невозможно удержать в отверстии. Если шар имеет массу, большую ординаты точки  $C$ , то он вообще не всплывает.

**Р28.** Мыльный пузырь плавает в воздухе, поэтому общая масса его оболочки и гелия внутри равна массе вытесненного воздуха. Так как плотность гелия меньше половины плотности воздуха, масса гелия меньше половины массы вытесненного воздуха. Таким образом, оболочка пузыря должна быть тяжелее

гелия внутри. На самом деле, оболочка тяжелее гелия примерно в 6 раз.

**Р29.** Заметим сразу, что давление под выпуклой поверхностью жидкости всегда больше, чем над ней. Чем сильнее искривлена поверхность, т.е. чем меньше радиус кривизны, тем больше разность давлений по разные стороны этой поверхности. Для поверхности, образованной в трубке или на ее конце, минимальный радиус кривизны равен половине ее внутреннего диаметра – этим и определяется максимальная разность давлений, которую может выдержать свободная поверхность воды. В нашем случае это давление столбика воды высотой  $H$ .

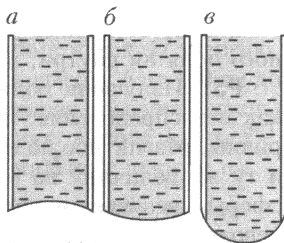


Рис. 114

В случае *a* (рис. 114) ясно, что из такой трубки вода вытекать не может. Если это было бы возможно, то вытекающая вода, за счет кинетической энергии на уровне жидкости в сосуде, смогла бы, например, вращать колесо, производя при этом механическую работу бесконечно долго, так как вода все время возвращалась бы в сосуд (вечный двигатель).

Случаи *б* и *в* не настолько просты. Концы обеих трубок ниже, чем уровень воды, и следовательно, давление воды больше атмосферного давления, если не учитывать силы поверхностного натяжения (лапласовское давление).

По мере удаления свободного конца трубки от уровня жидкости в сосуде мениск жидкости «стареется» быть таким, чтобы компенсировать разность давлений жидкости под поверхностью и наружного воздуха. В случае *a* поверхность вогнута, давление снаружи больше, чем под поверхностью, и вода даже не стремится вытекать. В случаях *б* и *в* поверхности выпуклые, давление снаружи меньше, чем под поверхностью, вода пытается вытекать. Для случая *б* сил поверхностного натяжения хватает для ее удержания (радиус кривизны поверхности больше критического, соответствующего высоте  $H$ ), для случая *в* сил поверхностного натяжения недостаточно, так как  $H' > H$  и радиус кривизны поверхности не может стать меньше радиуса отверстия в трубке, чтобы удержать воду от вытекания.

**Р30.** Система, описанная в задаче, сферически симметрична. Поэтому созданное магнитное поле  $\vec{B}$  должно быть также сферически симметричным. Индукция такого поля должна быть направлена по радиусу, а ее величина должна зависеть только от расстояния  $r$ , а именно:  $\vec{B}(\vec{r}) = B(r)\vec{r}/r$ .

С другой стороны, магнитное поле не содержит никаких источников (магнитные монополи), и магнитный поток, пересекающий любую замкнутую поверхность, должен быть равен нулю в любой заданный момент. В частности, можно рассмотреть сферическую поверхность радиусом  $r$ , имеющую общий центр с конденсатором. Отсутствию источников может соответствовать лишь одно условие: если  $B(r) = 0$  для любого  $r$ .

Значит, ток, описанный в задаче, не создает никакого магнитного поля ни внутри, ни вне сферического конденсатора.

**Р31.** Излучение должно быть сферически симметричным, так как и распределение, и движение зарядов сферически симметричны. Магнитное поле всегда радиально и должно иметь одну и ту же величину на одном и том же заданном расстоянии от сферы, независимо от направления. Это, однако, является невозможным, так как такое магнитное поле (если только оно не нулевой величины) подразумевало бы присутствие магнитного заряда (магнитного монополя — того, что экспериментально в природе не обнаружено, хотя формального запрета на его существования и нет). Подобные рассуждения показывают, что электрическое поле также сферически симметрично и его величина зависит только от полного поверхностного заряда сферы, а не от параметров пульсации. Поэтому вне сферы может наблюдаться только статическое кулоновское поле, и сфера совсем не излучает.

Если рассмотреть отдельные части сферы, они будут себя вести как дипольно излучающие антенны. При расчете суммарного вклада излучателей необходимо учитывать амплитудно-фазовые соотношения между всеми излучениями, что также приведет к нулевому результату (это можно показать).

**Р32.** Никаких соревнований по прыжкам в высоту на Луне еще не проводилось. Однако здесь мы попробуем оценить ожидаемый результат.

Рекорд по прыжкам в высоту среди мужчин на Земле — около 240 см. Хороший прыгун в высоту — это мужчина ростом более 190 см и массой около 80 кг, с центром тяжести на высоте около 110 см над землей. Для успешного прыжка все его тело должно подняться до высоты перекладины, но его центр тяжести при этом может находиться и ниже. Это требует специальных технических приемов прыжка (их можно изучать в видеозаписях ускоренной съемки). При этом центр тяжести прыгуна в высоту остается приблизительно на 20 см ниже перекладины даже тогда, когда он находится в верхней фазе своего прыжка. (Для так называемого переката и перекидной



техники центр тяжести прыгуна должен подняться над пере-  
кладной.)

Наиболее трудная часть нашей оценки – сравнить движение прыгуна при отрыве от Земли с движением прыгуна, отрывающегося от Луны. Предположим, что центр тяжести прыгуна в высоту поднимается на  $s = 40$  см от его самой низкой точки (при приседании перед прыжком) до самой высокой точки (когда он только что оторвался от опоры) и на Земле, и на Луне. Кроме того, тело прыгуна должно приобрести кинетическую энергию, достаточную для того, чтобы подняться на высоту  $h$  от 110 см до 220 см (т.е.  $h = 110$  см). Таким образом, мышцы прыгуна должны обеспечить поднятие центра масс на полную высоту  $h + s$ , т.е. совершить работу по увеличению потенциальной энергии на

$$W = mg(h + s) = 80 \text{ кг} \cdot 10 \text{ м/с}^2 \cdot 1,5 \text{ м} = 1200 \text{ Дж}.$$

Теперь, основываясь на предположении, что работа мышц и технические приемы прыжка на Земле на Луне одни и те же, сделаем оценки. Так как гравитационное ускорение на Луне составляет только шестую часть земного ускорения, энергетическое уравнение прыжка на Луне запишем в виде

$$W = 1200 \text{ Дж} = \frac{1}{6} mg(s + h'), \text{ откуда найдем } h' = 8,6 \text{ м}.$$

Это — высота, на которую центр тяжести прыгуна поднимется на Луне. К ней нужно добавить начальную высоту центра тяжести 110 см и дополнительные 0,2 м, возникающие из-за специальных технических приемов. В результате ожидаемый рекорд оценивается в  $9,9 \text{ м} \approx 10 \text{ м}$ .

*Примечание.* Отвечая на этот вопрос, обычно обращают внимание только на разность гравитационных ускорений, говоря, что мировой рекорд на Луне был бы в шесть раз выше, чем на Земле, т.е. приблизительно 14–15 метров. Согласно приведенному анализу, эта оценка слишком оптимистическая. Даже наша оценка, вероятно, слишком завышена, так как в нашей модели прыгун в высоту должен совершить ту же работу за более короткое время, т.е. должен развить большую мощность. Можно показать, что прыгун на Луне должен увеличить свою мощность почти на 15 процентов. Если вместо этого скорость, с которой он отрывается от опоры, взять такой же, как и на Земле, в результате получится 8 м; это будет слишком низкое значение. Приняв во внимание все рассуждения, можно считать, что наиболее вероятное значение высоты равно приблизительно 9 м.

**Р33.** а) Скорость шарика  $A$  перед ударом по шарiku  $B$  равна (рис.115)

$$v = \sqrt{2gl} = \sqrt{2 \cdot 10 \text{ м/с}^2 \cdot 1 \text{ м}} = 4,47 \text{ м/с}.$$

После удара шарик  $B$  начинает движение в горизонтальном направлении с этой скоростью, т.е.  $v_r = 4,47 \text{ м/с}$ . Эта скорость сохраняется и дальше. Однако шарик  $B$  падает, и через время

$$t = \sqrt{\frac{2l}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1 \text{ м}}{10 \text{ м/с}^2}} = 0,447 \text{ с}$$

он коснется земли. За это время он улетит по горизонтали на расстояние

$$s = v_r t = \sqrt{2gl} \sqrt{\frac{2l}{g}} = 2l = 2 \text{ м}.$$

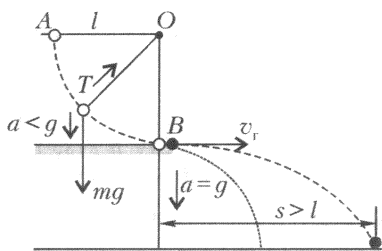


Рис. 115

Из рисунка легко сообразить, что из-за наличия натяжения нити вертикальная составляющая ускорения шарика  $A$  уменьшается от  $g$  до отрицательного значения в точке соударения, в то время как ускорение шарика  $B$  всегда равно  $g$ . Значит, при одинаковом спуске у шариков  $A$  и  $B$  будут разные вертикальные составляющие скорости, а так как пути по вертикали у шариков одинаковы, шарик  $A$  находится в полете дольше, чем шарик  $B$ .

б) Для сравнения длин траекторий шариков предложим следующий прием. Предположим, что шарик  $B$  начал двигаться не по параболе (свободно), а внутри тонкой гладкой трубки в форме четверти окружности, так что его новая траектория по длине будет такой же, как и у шарика  $A$ . В этом случае скорость нашего шарика, будем его теперь обозначать  $B'$ , на любой высоте будет направлена под большим углом к горизонту, чем в случае свободного падения. Действительно, при движении внутри трубки вертикальная составляющая ускорения шарика будет больше  $g$  из-за действия стенок трубки. Но на одной и той же высоте у шариков  $B$  и  $B'$  будут одинаковые по величине скорости. Тогда за одинаковые промежутки времени шарик  $B'$  пройдет одинаковые пути по своим траекториям, однако шарик  $B'$  опустится ниже, и шарiku  $B$  потребуется дополнительное время, чтобы оказаться на той же высоте, и за это время он пройдет по своей траектории дополнительный путь. Поэтому к моменту падения на землю шарик  $B'$  пройдет меньший путь, чем шарик  $B$ .

Итак, длина траектории шарика  $B$  больше, чем шарика  $A$ .

**Р34.** Для равномерного кругового движения тангенциальное ускорение тела нулевое, а радиальное ускорение равно  $v^2/R$ , где  $v$  – скорость тела и  $R$  – радиус окружности. Поскольку радиальная и тангенциальная составляющие силы тяжести равны  $mg \sin \theta$  и  $mg \cos \theta$  соответственно (рис.116), тангенциальная и радиальная составляющие силы натяжения нити  $\vec{F}$  равны

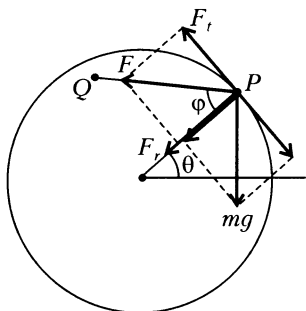


Рис. 116

$$F_t = mg \cos \theta \text{ и } F_r = \frac{mv^2}{R} - mg \sin \theta.$$

Из этих выражений можно найти направление силы  $\vec{F}$  и, следовательно, направление нити, характеризуемое углом  $\varphi$ :

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{F_r}{F_t} = \frac{v^2}{gR \cos \theta} - \operatorname{tg} \theta = \frac{1,83}{\cos \theta} - \operatorname{tg} \theta.$$

На рисунке 117 показаны соответствующие положения двух концов веревки. Помеченные точки соответствуют изменению угла  $\theta$  через  $15^\circ$ . Дли-

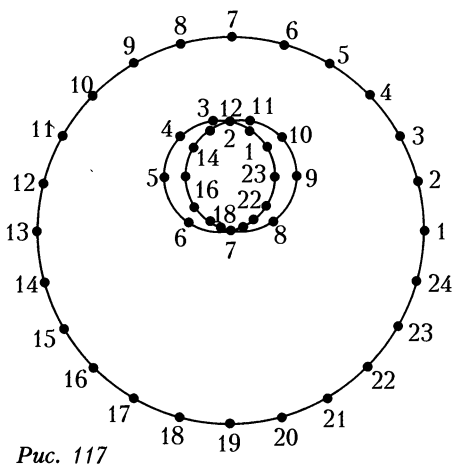


Рис. 117

на нити  $PQ$  – расстояние между точками с одинаковыми номерами, а направление нити определяется направлением отрезка с одинаковыми числами у концов. Диаграмма строилась следующим образом. Для каждого угла  $\theta_i$  вычислялся угол  $\varphi_i$ , из  $i$ -й точки на большой окружности проводилась прямая под этим углом  $\varphi_i$  и ставилась соответствующая точка  $i$  так, чтобы расстояние между одинаковыми точками всегда было равно длине нити.

**Р35.** Рассмотрим две траектории, изображенные на рисунке 118. При движении в вертикальном направлении ускорение равно ускорению свободного падения  $g$ , что явно больше, чем для

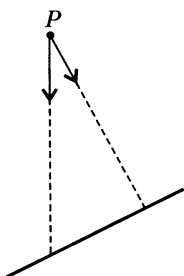


Рис. 118

наклонного пути. Но длина вертикального пути тоже больше пути наклонного. Можно предположить, что кратчайший по времени путь находится где-то между этими двумя прямыми.

Теперь докажем следующее вспомогательное утверждение (теорема Галилея): координаты всех тел, начинающих одновременное движение в поле силы тяжести без трения по прямым желобам под разными наклонами к горизонту из одной точки  $P$ , лежат на сфере в любой момент времени  $t > 0$ .

Как показано на рисунке 119, центр окружности (это сечение сферической поверхности) лежит на вертикали, а самая высокая точка окружности является начальной точкой движения  $P$ .

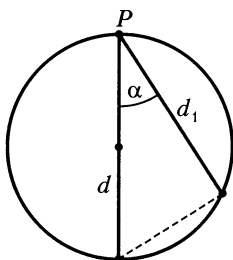


Рис. 119

Пусть прошло время  $t$ , и расстояние, пройденное телом по вертикали, определяет длину диаметра  $d$  окружности:  $d = gt^2/2$ . Пусть теперь другое тело перемещается по наклонной прямой под углом  $\alpha$  к вертикали. Тогда, имея ускорение  $a = g \cos \alpha$ , оно проходит за то же время расстояние  $d_1 = g \cos \alpha \cdot t^2/2 = d \cos \alpha$ . Но расстояние  $d_1$  точно равно длине хорды окружности. Таким образом,

независимо от  $\alpha$ , всякое тело окажется в соответствующей точке окружности, которая определяется временем падения тела по вертикали. Утверждение доказано.

Теперь понятна геометрия поставленной задачи. Нужно построить окружность, проходящую через точку  $P$  и касающуюся заданной наклонной плоскости (с заданным углом наклона  $\alpha$ ) в некоторой точке  $P'$ , а центр этой окружности должен лежать на вертикали под точкой  $P$ . Тогда прямая  $PP'$  и будет искомой. Рисунок 120 сделан на основе этих рассуждений. Из него с очевидностью понятно, что тело,двигающееся по прямой под углом  $\alpha/2$  к вертикали, достигнет наклонной плоскости за самое короткое время.

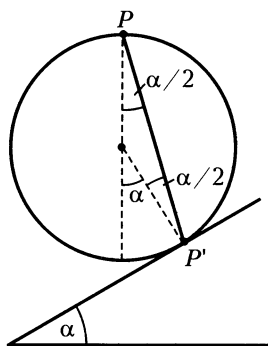


Рис. 120

**Р36.** Воспользуемся вращающейся системой отсчета, связанной с минут-

ной стрелкой. В этой системе минутная стрелка находится в покое, а часовая стрелка вращается в направлении «против часовой стрелки». Расстояние между концами минутной и часовой стрелки увеличивается с самой большой скоростью тогда, когда вектор относительной скорости конца часовой стрелки направлен вдоль прямой, соединяющей концы стрелок. Так как вектор относительной скорости конца часовой стрелки всегда перпендикулярен самой стрелке, то в этот момент концы стрелок и центр вращения должны образовать прямоугольный треугольник с центральным углом  $\theta$  (рис. 121). Так как минутная стрелка вдвое длиннее часовой, то

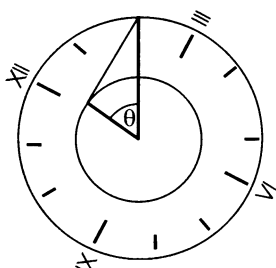


Рис. 121

$$\theta = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

Из рисунка видно, что искомая ситуация возникает приблизительно через 10 минут после полуночи.

Теперь вычислим точное время после полуночи, когда угол между стрелками равен  $\theta$ . Поскольку минутная стрелка перемещается в 12 раз быстрее часовой и вращаются они в разные стороны (относительно), то абсолютный угол  $\phi$  между часовой стрелкой и позицией «XII часов» задается формулой  $12\phi - \phi = \theta$ , откуда получаем, что угол  $\phi$  поворота часовой стрелки равен  $\theta/11$ . Минутная стрелка повернется при этом на угол  $12\phi = 12\theta/11 = 4\pi/11$  и окажется как раз перед положением «11 минут после полуночи».

Заметим, что в течение часа стрелки еще раз образуют точно такой же треугольник, но на этот раз они будут не удаляться, а сближаться. И так будет каждый час.

**Р37.** Используя систему координат, показанную на рисунке 122, движение камня можно описать следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} x &= v_0 t \cos \alpha, \\ y &= v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}, \\ v_x &= v_0 \cos \alpha, \\ v_y &= v_0 \sin \alpha - gt. \end{aligned}$$

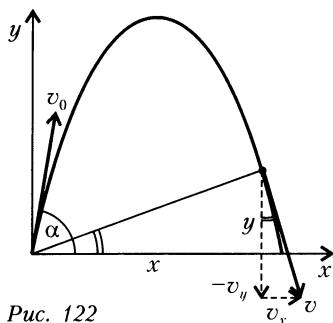


Рис. 122

Камень находится на самом большом расстоянии от начального положения, когда его скорость перпендикулярна его радиусу-вектору. Это означает, что в этот момент

$$\frac{y}{x} = -\frac{v_x}{v_y}.$$

В результате получаем квадратное уравнение относительно момента времени  $t$ , когда это происходит:

$$g^2 t^2 - (3gv_0 \sin \alpha) t + 2v_0^2 = 0.$$

Для достижения максимального угла необходимо, чтобы дискриминант этого уравнения был равен нулю, т.е.

$$(3gv_0 \sin \alpha_{\text{макс}})^2 - 8g^2 v_0^2 = 0,$$

или

$$\sin \alpha_{\text{макс}} = \sqrt{\frac{8}{9}}.$$

Отсюда находим максимальный угол бросания:

$$\alpha_{\text{макс}} = \arcsin 0,94 = 70,5^\circ.$$

Таким образом, для того чтобы камень постоянно удалялся от бросающего, угол бросания должен быть меньше  $70,5^\circ$ .

**Р38.** Траектория кузнечика – это парабола, которая касается ствола в симметрично расположенных точках  $B$  и  $B^*$  на двух сторонах ствола (рис.123). Кузнечик удаляется от точки  $A$  с начальной скоростью  $v_1$  под углом  $\theta$  к горизонту. В точках касания  $B$  и  $B^*$  скорость кузнечика  $v_2$  составляет угол  $\beta$  с горизонталью.

Ради простоты мы выберем  $\beta$  в качестве независимой переменной задачи. Тогда в точке  $B$  вертикальная составляющая скорости равна

$$v_2 \sin \beta = gt_2,$$

где  $t_2$  – время полета на участке  $BC$  траектории ( $C$  – максимальная точка подъема, максимум параболы). Соответствующее горизонтальное перемещение  $BF$  равно

$$v_2 t_2 \cos \beta = R \sin \beta.$$

После перемножения этих двух уравнений получаем

$$v_2^2 = \frac{gR}{\cos \beta}.$$

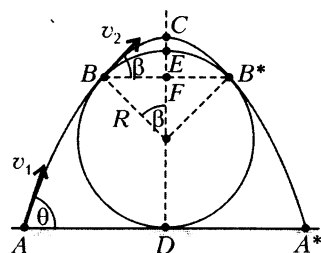


Рис. 123

Закон сохранения энергии при полете между точками  $A$  и  $B$  дает

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + mg(R + R \cos \beta),$$

или

$$v_1^2 = v_2^2 + 2gR(1 + \cos \beta) = \frac{gR}{\cos \beta} + 2gR(1 + \cos \beta).$$

Мы получили выражение для начальной скорости в виде

$$v_1^2 = 2gR \left( 1 + \cos \beta + \frac{1}{2 \cos \beta} \right)$$

и можем вычислить минимальное значение  $v_1$ , используя дифференциальное исчисление. Приравняв производную  $d(1 + \cos \beta + 1/(2 \cos \beta))/d\beta$  к нулю, получаем  $\cos^2 \beta = 1/2$ . Таким образом, минимальный угол, который дает минимум начальной скорости, равен  $45^\circ$ .

Однако имеется и другой метод, который использует неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим. В нашем случае мы можем записать

$$\frac{1}{2} \left( \cos \beta + \frac{1}{2 \cos \beta} \right) \geq \sqrt{\cos \beta \frac{1}{2 \cos \beta}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

так что минимальное значение суммы  $\cos \beta + 1/(2 \cos \beta)$  равно  $\sqrt{2}$ , откуда следует, что  $\beta = 45^\circ$ .

Это и есть угол, под которым кузнечик касается бревна при полете в оптимальном случае. Если допустить, что  $\beta = 0$ , то потребуется большая начальная скорость, так как  $\cos \beta + 1/(2 \cos \beta) = 1,5 > \sqrt{2}$ . Из этого следует, что траектория с минимальной начальной скоростью не касается ствола в его самой высокой точке (точка  $E$ ). Гравитационная потенциальная энергия кузнечика больше на пике параболы, чем в высшей точке ствола, но его кинетическая энергия и полная энергия меньше, чем они были бы для траектории, касающейся вершины.

Таким образом, минимальная начальная скорость кузнечика равна

$$v_{1\text{ мин}} = \sqrt{2gR(1 + \sqrt{2})} \approx 2,2 \text{ м/с}.$$

*Примечания.* а) Можно показать, что часть параболической траектории над точкой  $B$  не пересекает ствол.

б) Довольно легко определить также угол  $\theta$  начального прыжка и расстояние  $AD$ . Расчеты дают

$$\theta \geq \frac{3\pi}{8} = 67,5^\circ, \quad AD = R \left( 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \approx 17 \text{ см}.$$

в) Обратите внимание на то, что точка  $F$  является фокусом параболы.

**Р39.** Если смотреть сверху, то картина должна выглядеть так, как показано на рисунке 124. Блохи прыгают в направлениях,

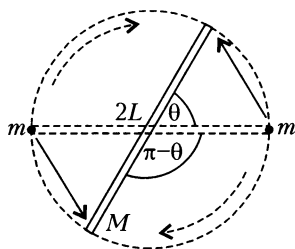


Рис. 124

составляющих углы  $(\pi - \theta)/2$  с начальным положением соломинки. Соломинка, отреагировав на пару сил при толчке блох, должна вращаться в противоположном направлении с такой скоростью, чтобы к моменту приземления блох повернуться хотя бы на угол  $\pi - \theta$ . В этом случае блохи приземлятся на противоположные концы соломинки по отношению к тем, с которых прыгали.

Пусть  $v$  и  $\alpha$  – скорость и угол взлета соответственно,  $2L$  – длина соломинки. Тогда время полета  $t$  определяется, как обычно, по формуле  $t = (2v \sin \alpha)/g$ , а расстояние  $s$  по горизонтали – по формуле  $s = vt \cos \alpha$ . Геометрически расстояние  $s$  должно быть равно  $2L \sin(\theta/2)$ . При симметричном толчке соломинка приобретает момент импульса, который равен сумме горизонтальных проекций моментов импульсов блох. Таким образом,

$$2mvL \cos \alpha \cos \frac{\theta}{2} = I\omega,$$

где  $\omega$  – угловая скорость вращения,  $I = ML^2/3$  – момент инерции соломинки,  $M$  – ее масса. По условию задачи,

$$\omega t = \pi - \theta.$$

Исключение  $\alpha$ ,  $t$  и  $\omega$  из уравнений, полученных ранее, приводит к тому, что угол  $\theta$  должен удовлетворять уравнению

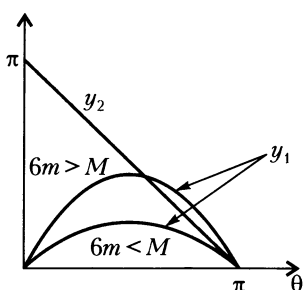


Рис. 125

$$\frac{6m}{M} \sin \theta + \theta = \pi.$$

Если  $m > M/6$ , то уравнение имеет решение, которое легко найти из пересечения графика функции  $y_1 = (6m/M) \sin \theta$  с графиком функции  $y_2 = (\pi - \theta)$  (рис.125).

*Примечание.* Функция  $f(\theta) = n \sin \theta + \theta$  имеет такое свойство:  $f(\pi) = \pi$ , каким бы ни было значе-



ние  $n$ . Кроме того, уравнение для производной  $f'(\theta) = n \cos \theta + 1 = 0$  имеет решение при  $0 < \theta < \pi$  и  $n > 1$ . Таким образом, если  $n$  строго больше единицы, то  $f(\theta)$  имеет максимум и строго меньше чем  $\pi$ . Суммируя сказанное, получаем, что при  $n > 1$  функция  $f(\theta) = \pi$  имеет решение для некоторого значения  $\theta$ , строго меньше чем  $\pi$ . В контексте вопроса это условие означает, что  $m > M/6$ , что и показано на рисунке 125.

**Р40.** Водяной колокол цилиндрически симметричен относительно вертикальной оси, поэтому достаточно решить задачу, рассматривая его сечение.

Пусть точечный распылитель находится в начале декартовой системы координат (рис.126). Тогда струи воды следуют по параболическим траекториям, начинающимся в начале координат, и наша математическая задача состоит в том, чтобы найти огибающую (показанную пунктиром на рисунке) к этому набору парабол.

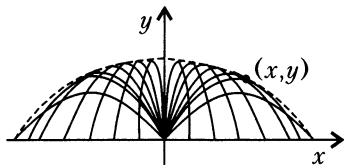


Рис. 126

Известно, что уравнение траектории тела, брошенного с начальной скоростью  $v$  под углом  $\alpha$  к горизонту, записывается в виде

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v^2 \cos^2 \alpha}.$$

Это уравнение можно преобразовать к виду

$$Xu^2 - xu + (y + X) = 0,$$

где  $u = \operatorname{tg} \alpha$ ,  $X = gx^2/(2v^2)$ . Если точка  $(x, y)$  фиксирована, то это — квадратное уравнение для  $u$ , которое имеет действительное решение, если его дискриминант неотрицателен, т.е. если

$$x^2 - 4X(y + X) \geq 0.$$

Так как нам интересен случай  $x \neq 0$ , получаем условие

$$y \leq \frac{1}{2} \left( \frac{v^2}{g} - \frac{g}{v^2} x^2 \right).$$

Это неравенство делит плоскость  $xy$  на две области, разделенные параболой. Вода может достигать точек под параболой (параболоид вращения — в трех измерениях), но не может быть выше ее. Ограничивающая парабола и есть искомая огибающая.

Итак, водяной колокол — это параболоид вращения. Из уравнения для ограничивающей кривой ясно, что высота колокола равна  $v^2/(2g)$ , чего можно было бы ожидать при рассмотрении движения тела, брошенного вертикально вверх. Водяной колокол определяет круг на поверхности воды в бассейне, радиус  $r$  которого находится из условия  $y = 0$ , что дает  $r = v^2/g$ . Это означает, что диаметр бассейна должен быть, по крайней мере, в четыре раза больше высоты водяного колокола, чтобы не было потерь воды.

**Р41.** Ускорения частицы в горизонтальном ( $x$ ) и вертикальном ( $y$ ) направлениях постоянны, поэтому зависимости координат от времени можно записать в виде

$$x = vt \cos \theta + \frac{EQt^2}{2m}, \quad y = vt \sin \theta - \frac{gt^2}{2},$$

считая, что горизонтальная составляющая начальной скорости сонаправлена с напряженностью электрического поля. Если положить  $y = 0$ , то исключение  $t$  из уравнений приводит к уравнению для дальности, данному в подсказке:

$$\begin{aligned} v \sin \theta - \frac{gt}{2} &= 0, \quad t = \frac{2}{g} v \sin \theta, \quad a = \frac{EQ}{m}, \\ x &= vt \cos \theta + \frac{at^2}{2} = \frac{2v^2}{g} \cos \theta \sin \theta + \frac{a}{g} \frac{2v^2}{g} \sin^2 \theta = \\ &= \frac{2v^2}{g} \left( \cos \theta + \frac{a}{g} \sin \theta \right) \sin \theta. \end{aligned}$$

При  $dx/d\theta = A(-\sin \theta + (a/g) \cos \theta) = 0$  получаем

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{a}{g}.$$

Это и есть оптимальный угол для получения максимального смещения  $x_m$  частицы:

$$\begin{aligned} x_m &= \frac{2v^2}{g} \left( \frac{1}{\operatorname{tg} \theta} + \frac{a}{g} \right) \sin^2 \theta = \frac{2v^2}{g} \left( \frac{g}{a} + \frac{a}{g} \right) \sin^2 \theta = \\ &= \frac{2v^2}{g} \frac{a}{g} \left( \left( \frac{g}{a} \right)^2 + 1 \right) \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Но  $\sin^2 \theta = \operatorname{tg}^2 \theta / (1 + \operatorname{tg}^2 \theta) = (a/g)^2 / (1 + (a/g)^2)$ . Подставив в  $x_m$ , получим

$$x_m = \frac{2v^2}{g} \frac{a}{g} = \frac{2v^2}{g^2} \frac{EQ}{m}.$$

**Р42.** Из статического условия равновесия стержня (суммарная вертикальная сила и суммарный крутящий момент равны нулю) найдем силы реакции со стороны пальцев на расстояниях  $x$  и  $y$  от центра масс стержня  $O$  (рис.127):

$$F_x = \frac{mgy}{x+y}, \quad F_y = \frac{mgx}{x+y}.$$

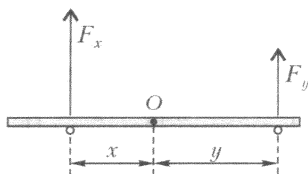


Рис.127

Предположим, что стержень сначала скользит на моем левом пальце. В любой момент сила трения  $F_{тр}$ , действующая на этот палец, определяется формулой

$$F_{тр} = \mu_{ск} F_x = \mu_{ск} mg \frac{y}{x+y},$$

где  $\mu_{ск}$  – коэффициент трения при скольжении (кинетический коэффициент трения), он всегда чуть меньше коэффициента трения покоя  $\mu$  (просто коэффициент трения). Для медленного движения (горизонтальное ускорение пренебрежимо мало) эта сила равна статической силе трения, действующей на правый палец, которая имеет максимальное значение

$$\mu F_y = \mu mg \frac{x}{x+y}.$$

Таким образом, левый палец может скользить до тех пор, пока

$$\mu_{ск} y \leq \mu x, \quad \text{т.е. } x \geq ky,$$

где  $k = \mu_{ск}/\mu \leq 1$ . Первоначально  $x_0 = y_0 = l/2$ , так что мой левый палец движется к положению  $x = x_1 = kl/2$ , работая против непрерывно изменяющейся силы трения. Работу  $A(x_0 \rightarrow x_1)$ , сделанную в течение этого скольжения, можно найти при помощи интегрирования функции  $-\mu_{ск} F_x = -\mu_{ск} mg (l/2)/(x+l/2)$  в пределах от  $x_0 = l/2$  до  $x_1 = kl/2$ :

$$A(x_0 \rightarrow x_1) = -\mu_{ск} mg \int_{x+l/2}^{l/2} \frac{1}{x+l/2} dx = \mu_{ск} mg \frac{l}{2} \ln \frac{2}{k+1}.$$

На второй стадии скользит мой правый палец, при этом  $x$  равен  $x_1$  и постоянен, а  $y$  изменяется от  $l/2$  до  $y_1 = kx_1 = k^2 l/2$ . Работа  $A(y_0 \rightarrow y_1)$  в этом случае будет равна интегралу от функции  $-\mu_{ск} mg (x_1/(x_1+y))$  в пределах от  $y_0 = l/2$  до  $y_1 = k^2 l/2$ :

$$A(y_0 \rightarrow y_1) = -\mu_{ск} mg \int_{x_1+y}^{x_1+l/2} \frac{x_1}{x_1+y} dy = \mu_{ск} mg \frac{l}{2} k \ln \frac{1}{k}.$$

Подобным же образом мы можем вычислять работу в течение всех последующих стадий, когда стержень скользит поочередно то на левом, то на правом пальце. Полная работа будет равна

$$A = \mu_{\text{ск}} mg \frac{l}{2} \left( \ln \frac{2}{k+1} + (k + k^2 + k^3 + \dots) \ln \frac{1}{k} \right) = \\ = \mu_{\text{ск}} mg \frac{l}{2} \left( \ln \frac{2}{k+1} + \frac{k}{1-k} \ln \frac{1}{k} \right).$$

Если  $\mu_{\text{ск}} \ll \mu$  (т.е.  $k \ll 1$ ), то работа совершается только в одну стадию и равна

$$A = \frac{1}{2} \mu_{\text{ск}} mgl \ln 2.$$

С другой стороны, если  $\mu \approx \mu_{\text{ск}}$  (т.е.  $k \approx 1$ ), то

$$\frac{k}{1-k} \ln \frac{1}{k} \approx 1,$$

откуда

$$A = \frac{1}{2} \mu_{\text{ск}} mgl.$$

**Р43.** Установим все кирпичи друг на друге ровной стопкой и выровняем с краем стола. Пусть  $L$  – длина каждого кирпича, а координата края стола по горизонтали равна нулю. Пронумеруем их сверху вниз: 1, 2, 3, 4, (5, и т.д.). Начнем процесс смещения кирпичей с самого верхнего (рис.128). Так как центр тяжести кирпича 1 находится на расстоянии  $L/2$  слева от края, то его можно сместить на  $L/2$  (на самом деле, чуть меньше), и он не упадет с кирпича 2. Далее, видим, что центр тяжести системы кирпичей 1 и 2 находится на расстоянии  $L/4$  слева от края, поэтому эти кирпичи как единое целое можно сместить на  $L/4$  (на самом деле, чуть меньше), и они не упадут с кирпича 3. Кирпич 1, таким образом, оказался смещенным на  $L/2 + L/4$ . Теперь видим, что центр тяжести системы кирпичей 1, 2 и 3 находится на расстоянии  $L/6$  слева от края, поэтому эти кирпичи как единое целое можно сместить на  $L/6$  (на самом деле, чуть меньше), и они не упадут с кирпича 4. Кирпич 1 при этом оказался смещенным на  $L/2 + L/4 + L/6$ . Для окончательного понимания процесса убеждаемся в том, что центр тяжести системы кирпичей 1, 2, 3 и 4

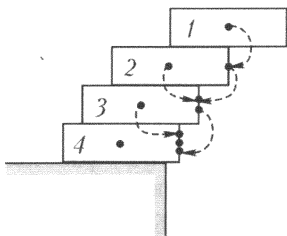


Рис.128

находится на расстоянии  $L/8$  слева от края, поэтому эти кирпичи как единое целое можно сместить на  $L/8$  (на самом деле, чуть меньше), и они не упадут со стола. Кирпич  $1$  в итоге оказался смещенным на расстояние  $L/2 + L/4 + L/6 + L/8$ .

Теперь, конечно, уже совершенно ясно, что увеличение числа кирпичей и постепенное смещение  $i$ -го кирпича на расстояние  $(L/2)/i$  обеспечивает вынос кирпича  $1$  на расстояние  $(L/2)(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + \dots + 1/n)$ . Сумма ряда в скобках при  $n$ , стремящемся к бесконечности, тоже стремится к бесконечности. Значит, теоретически верхний кирпич можно сдвинуть без потери равновесия на какое угодно расстояние.

Реально необходимо учесть неточность в изготовлении кирпичей и их установки по заданному алгоритму. Если положить общую неточность порядка 0,4 см, то число кирпичей, участвующих в смещении, может быть порядка 30, а кирпич  $1$  при этом смещается на две свои длины. (Элементарно можно изготовить, например, вход в здание шириной около метра и высотой около двух метров.) При наличии четырех кирпичей верхний кирпич можно сместить относительно края стола на 1,04 длины кирпича.

**Р44.** Пусть  $2m$  – масса пластины,  $N_1, N_2$  и  $F_1, F_2$  – нормальные силы реакции и силы трения соответственно (рис.129). Уравнения равновесия для горизонтальных и вертикальных сил запишем в виде

$$N_1 + F_2 = 2mg, \quad F_1 = N_2.$$

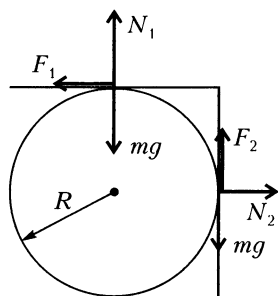


Рис.129

Равновесие моментов относительно вершины угла пластины дает

$$(mg + N_2)R = N_1R,$$

или

$$N_1 = mg + N_2.$$

Силы трения подчиняются неравенствам

$$F_1 \leq \mu N_1, \quad F_2 \leq \mu N_2.$$

Отсюда можно получить следующие три соотношения:

$$F_2 = mg - F_1,$$

$$F_2 \leq \mu F_1,$$

$$F_1 \leq \mu N_1 = \mu(mg + N_2) = \mu mg + \mu F_1, \text{ или } F_1 \leq \frac{\mu mg}{1 - \mu}.$$

Эти соотношения можно изобразить графически в системе координат  $F_1, F_2$ . Если коэффициент трения покоя достаточно большой, ситуация такова, как показано на рисунке 130. В этом случае задача не имеет единственного решения – в области, представленной отрезком прямой  $AB$ , статические условия равновесия могут быть удовлетворены неким диапазоном сил трения. Если коэффициент трения покоя слишком маленький,

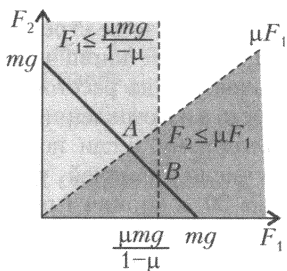


Рис. 130

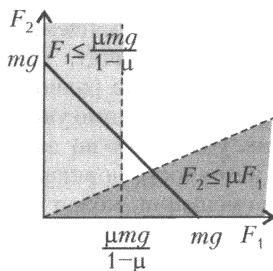


Рис. 131

ситуация такова, как показано на рисунке 131, и задача вообще не имеет никакого решения. Минимальное возможное значение коэффициента трения покоя соответствует тройному пересечению границ неравенств для  $F_2$  и  $F_1$  и равенства  $F_2 = mg - F_1$ , как показано на рисунке 132. В этом случае вместо неравенств мы можем использовать равенства и после некоторых вычислений

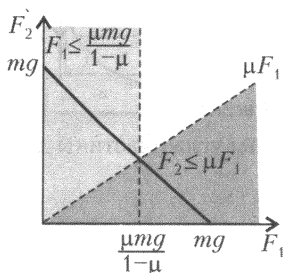


Рис. 132

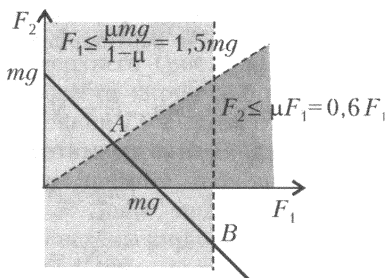


Рис. 133

найдем минимальное значение коэффициента трения покоя:

$$\mu = \sqrt{2} - 1 \approx 0,414.$$

Нужно также признать возможность того, что  $F_2$  может быть отрицательным как показано на рисунке 133.

**Р45.** Если шары начинают падать с высоты  $h$ , то они достигают земли со скоростью  $v = \sqrt{2gh}$ . Нижний шар первым ударяется о землю и затем сталкивается с верхним шаром,

который получит самую большую возможную энергию, если нижний шар будет находиться в покое после двух столкновений.

Нижний шар ударяет о землю рикошетом со скоростью  $v$  и сталкивается с верхним шаром, перемещающимся вниз со скоростью  $-v$ . Так как скорость шара массой  $m_2$  после столкновения должна быть нулевой, уравнения, выражающие законы сохранения импульса и энергии, запишем в виде

$$(m_2 - m_1)v = m_1u, \\ \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} = \frac{m_1u^2}{2},$$

откуда найдем скорость  $u$  верхнего шара после столкновения и отношение масс шаров:

$$u = 2v \text{ и } \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, верхний шар поднимется до учетверенной высоты, если его масса в три раза меньше нижнего.

Удивительно, но верхний шар может подпрыгнуть даже еще выше. Если  $m_2 \gg m_1$ , то верхний шар фактически сталкивается с движущейся со скоростью  $v$  ему навстречу бесконечно тяжелой стенкой. В этом случае верхний шар приобретает скорость  $3v$  и подскакивает на высоту  $9h$ . При этом нижний шар продолжает движение вверх со скоростью  $v$ , почти не потеряв энергии.

Читатели, заинтересованные теоретическими проблемами, могут попробовать решить задачу с  $n$  шарами, а экспериментаторы могут попробовать изучить ситуацию с набором неидентичных шаров: они соударяются очень забавно!

**Р46.** Для первого столкновения законы сохранения импульса и энергии дают

$$M\sqrt{2gh} = MV + \mu v, \\ Mgh = \frac{MV^2}{2} + \frac{\mu v^2}{2}.$$

Исключим  $V$  и получим

$$v = \frac{2M\sqrt{2gh}}{M + \mu}.$$

Тогда кинетическая энергия  $E_1$ , переданная от первого шара среднему, равна

$$E_1 = \frac{4\mu M^2 gh}{(\mu + M)^2},$$

что составляет долю начальной энергии первого шара, равную

$$k_1 = \frac{4\mu M}{(\mu + M)^2}.$$

Доля энергии, переданной третьему шару, определяется произведением двух таких выражений, примененных к различным парам шаров. Для оптимизации этой доли  $\mu$  должно быть таким, чтобы выражение  $(\mu^2/(\mu + M)^2)(\mu + m)^2$  было максимальным. Отсюда следует, что  $\mu = \sqrt{Mm}$ , т.е.  $\mu$  равно среднему геометрическому от  $M$  и  $m$ . При таком значении  $\mu$  суммарная доля  $k_2$  переданной энергии от первого шара третьему составляет

$$k_2 = \frac{16Mm}{(\sqrt{M} + \sqrt{m})^4},$$

а высота  $h_m$ , достигаемая третьим шаром, равна

$$h_m = \frac{16M^2h}{(\sqrt{M} + \sqrt{m})^4}.$$

**Р47.** Так как гантели приближаются друг к другу с одинаковыми скоростями, то в системе координат, связанной со столом, сумма их импульсов нулевая (как и у центра масс системы). Таким образом, закон сохранения импульса подразумевает, что центры масс этих гантелей всегда движутся с одинаковыми скоростями, но в противоположных направлениях.

Когда гантели сталкиваются, энергия и суммарный момент импульса сохраняются, так как система изолирована от внешних воздействий, а столкновения абсолютно упругие. Состояния системы до и после столкновения показаны на рисунке 134. Перед столкновением гантели обладают только поступательной кинетической энергией, в то время как после столкновения появляется вращательная энергия. Вычислив момент импульса для гантелей относительно их точки контакта  $P$ , запишем урав-

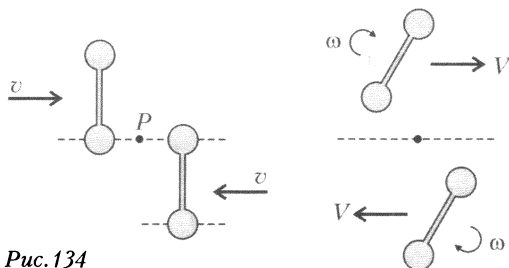


Рис. 134



нения законов сохранения энергии и момента импульса системы:

$$2\left(\frac{2mv^2}{2}\right) = 2\left(\frac{2mV^2}{2} + \frac{2ml^2\omega^2}{2}\right),$$

$$4mvl = 4mVl + 4ml^2\omega.$$

Нетривиальное решение ( $V \neq v$ ,  $\omega \neq 0$ ) этой системы уравнений таково:  $V = 0$ ,  $\omega = v/l$ . Это означает, что центры масс гантелей прекращают перемещаться после столкновения, сталкивающиеся точечные массы изменяют свои скорости, в то время как несталкивающиеся сохраняют свои первоначальные скорости. Ситуацию можно интерпретировать следующим образом: точечные массы, соединенные твердым, но невесомым стержнем, не ощущают присутствия друг друга в ходе мгновенного столкновения; стержень передает момент силы, возникающей из-за деформации ударяющихся шаров, когда гантель вращается относительно своего неподвижного центра масс.

Понятно, что гантели, совершив каждая пол-оборота, т.е. через время  $t = \pi/\omega$ , снова сталкиваются. Используя предыдущие результаты, дальнейшее движение гантелей можно предсказать без решения уравнений: вращение гантелей прекращается, и

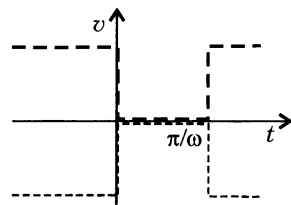


Рис. 135

они снова движутся поступательно с теми же самыми скоростями, как перед первым столкновением. Их путь — та же самая прямая, только шары у гантелей поменялись местами.

Скорость гантелей как функция времени показана на рисунке 135.

**Р48.** Движение рассматриваемых тел очень интересное. Изменение координат шайб по осям  $x$  и  $y$  от времени в безразмерных переменных показано на рисунке 136. Сначала шайба  $B$  из точки  $(0, L)$  равномерно движется до точки  $(L, L)$ , на это уходит время  $t_1/2$ . В этой точке нить натягивается, и происходит удар (абсолютно упругий). Так будет продолжаться до момента, когда шайба  $A$  окажется в точке  $(L, L)$ , а шайба  $B$  — точке  $(0, 2L)$ . В этот момент,  $t = 3t_1/2$ , нить опять натягивается, и происходит следующий удар. В результате шайба  $A$  движется по вертикали со скоростью  $v$  вверх, а шайба  $B$  стоит на месте. Нить опять ослабнет и натянется только тогда, когда шайба  $B$  окажется в точке  $(L, 3L)$ . В этот момент,  $t = 5t_1/2$ , конфигурация располо-

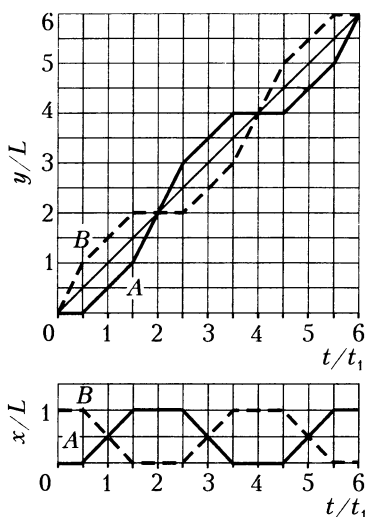


Рис. 136

жения шайб такая же, как была в момент  $t_1/2$ , только шайбы обменялись названиями. Анализируя сказанное, видим, что ситуация по всем параметрам восстанавливается через каждые  $4t_1$ . Но чтобы ни случилось, центр масс системы движется с постоянной скоростью  $v/2$ , увеличивая свою координату  $y$  и сохраняя координату  $x = L/2$ . Это отражено на графике  $y(t)$  в виде прямой, идущей под углом  $45^\circ$ .

При  $t = t_1$  обе шайбы имеют следующие параметры: шайба  $A$  — координаты  $(L/2, L/2)$  и составляющие скорости  $(v/2, v/2)$ ; шайба  $B$  —

координаты  $(L/2, 3L/2)$  и составляющие скорости  $(-v/2, v/2)$ .

Учтя повторяемость процесса, получаем, что при  $t = 50t_1 = 12 \cdot 4t_1 + 2t_1$  ситуация по координате  $x$  и скоростям становится такой же, как при  $t = 2t_1$ . Из рисунка видим, что теперь параметры шайб следующие: шайба  $A$  — координаты  $(L, 50L)$  и составляющие скорости  $(0, v)$ ; шайба  $B$  — координаты  $(0, 50L)$  и составляющие скорости  $(0, 0)$ .

**Р49.** Пусть  $x$  — отношение фактического уровня воды в кювете к максимальному уровню; то же самое число показывает отношение объема воды в момент времени  $t$  к максимально возможному объему.

Во время заполнения  $x$  увеличивается со временем  $t$  равномерно, пока не достигнет значения  $x = 1$  за время  $T_1$ , поэтому скорость наполнения кюветы  $v_+$  равна

$$v_+ = \left( \frac{dx}{dt} \right)_{\text{нап}} = \frac{1}{T_1}.$$

Когда вода вытекает, то скорость  $v_-$  вытекания и, следовательно, скорость уменьшения  $x$  пропорциональны квадратному корню из высоты столба воды, т.е. квадратному корню из  $x$ :

$$v_- = \left( \frac{dx}{dt} \right)_{\text{выт}} = -K\sqrt{x},$$

где  $K$  – коэффициент пропорциональности. Он определяется из условия уменьшения  $x$  от 1 до 0 за время  $T_2$ . Так как уравнение для вытекания имеет тот же вид, что и соотношение между скоростью и координатой при движении тела с постоянным ускорением  $a$ , т.е.  $v = \sqrt{2ax}$ , то можно считать, что уровень жидкости уменьшается до нуля при линейно изменяющейся скорости. Начальная скорость уменьшения  $x$  равна  $K$  (так как  $x = 1$ ), конечная скорость равна нулю; поэтому средняя скорость уменьшения  $x$  равна  $K/2$ . Таким образом,  $K = 2/T_2$ . (То же самое можно получить при интегрировании уравнения для  $v_-$ .)

Если открыть кран и сливное отверстие вместе, то результирующая скорость изменения уровня определится уравнением

$$\frac{dx}{dt} = v_+ + v_- = \frac{1}{T_1} - \frac{2\sqrt{x}}{T_2}.$$

В состоянии равновесия уровень  $x$  воды не изменяется, т.е.  $dx/dt = 0$ . Отсюда находим стационарный уровень  $x_{\text{ст}}$  воды:

$$x = x_{\text{ст}} = \left( \frac{T_2}{2T_1} \right)^2.$$

Например, если кювета заполняется за то же самое время, за которое опустошается ( $T_1 = T_2$ ), то  $x_{\text{ст}} = 1/4$  и не зависит от начальных условий. С данными, приведенными в задаче,  $x_{\text{ст}} = 1/9$ .

Можно заметить, что переполнение грозит только в том случае, если для опорожнения кюветы требуется более чем вдвое больше времени, чем для ее заполнения ( $T_2 > 2T_1$ ).

*Примечание.* Одно из условий, которое учитывается при доказательстве закона истечения Торричелли ( $v \sim \sqrt{h}$ ), состоит в том, что диаметр отверстия много меньше толщи воды. Это условие, конечно, не удовлетворяется, когда кювета почти пуста, и поэтому наши результаты только приблизительны. Кроме того, если отверстие очень маленькое, то вязкость воды, которой мы пренебрегали, тоже играет важную роль.

**Р50.** Когда сосуд вращается, свободная поверхность жидкости должна быть эквипотенциальной поверхностью (если это не так, то энергия системы может быть снижена за счет изменения профиля поверхности). Выберем цилиндрическую систему координат, вращающуюся с заданной угловой скоростью  $\omega$ . Тогда относительно этой системы жидкость будет покоиться. Полная плотность потенциальной энергии в любой точке  $(r, z)$  состоит из двух частей: из гравитационной энергии  $\rho g z$  и центробежной энергии  $-\rho \omega^2 r^2 / 2$  (так как центробежная сила инерции равна

$-\rho\omega^2 r$  и направлена от оси, то центробежная энергия в зависимости от  $r$  находится интегрированием от 0 до  $r$ ). Уравнение свободной поверхности записывается в виде

$$\rho g z - \frac{\rho\omega^2 r^2}{2} = 0.$$

Объем воздуха  $V_{\text{в}}$  в параболоиде над жидкостью до среза сосуда, при условии предельного невытекания жидкости и нулевой толщины слоя на оси цилиндра, определяется интегрированием функции  $\pi r^2$  от 0 до  $Z$  по  $z$ , где  $r^2$  надо выразить через  $z$  из уравнения свободной поверхности, полученного выше (т.е. заменить на  $2gz/\omega^2$ ). Таким образом, получаем

$$V_{\text{в}} = \frac{\pi g Z^2}{\omega^2},$$

где  $Z = \omega^2 a^2 / (2g)$ . Используя условие  $V_{\text{в}} = (1/3)V_{\text{цил}} = \pi a h / 3$ , получим выражение для наибольшей угловой скорости  $\Omega$  в виде

$$\Omega = \sqrt{\frac{4gh}{3a^2}}.$$

**Р51. Решение 1.** Рассмотрим систему автомобиль – Земля. Во время ускорения автомобиль как бы толкает Землю немного назад и тем самым изменяет ее угловую скорость. Чтобы разобраться в парадоксе задачи, необходимо учесть именно этот небольшой эффект.

Ради простоты, рассмотрим автомобиль массой  $m$ , едущий по телу массой  $M$  ( $M \gg m$ ), которое может двигаться свободно в направлении движения автомобиля. Неподвижный наблюдатель сказал бы, что если автомобиль сначала ускоряется до некоторой скорости  $v_0$  и затем до скорости  $2v_0$ , то тело массой  $M$  сначала достигает скорости  $u_1 = -mv_0/M$ , а затем  $u_2 = -2mv_0/M$ . При этом кинетическая энергия тела увеличивается сначала до  $Mu_1^2/2 = m^2v_0^2/(2M)$  и затем до  $Mu_2^2/2 = 2m^2v_0^2/M$ . Так как  $M \gg m$ , кинетической энергией большого тела и изменением его энергии можно пренебречь. Таким образом, отношение значений расхода топлива должно быть 1 : 3.

Ситуация меняется для наблюдателя, перемещающегося со скоростью  $v_0$ . Он видит, как скорость автомобиля сначала увеличивается с  $v_0$  до  $2v_0$  и затем до  $3v_0$ , в то время как, в соответствии с законом сохранения импульса, скорость другого тела изменяется от начальной  $-v_0$  до  $(1 - m/M)v_0$  и затем до  $(1 - 2m/M)v_0$ . Поэтому изменения кинетической энергии системы автомобиль – Земля следующие:

на первом этапе

$$m \frac{(2v_0)^2 - v_0^2}{2} + M \left(1 - \frac{m}{M}\right)^2 \frac{v_0^2}{2} - \frac{Mv_0^2}{2} \approx \frac{mv_0^2}{2},$$

на втором этапе

$$m \frac{(3v_0)^2 - (2v_0)^2}{2} + M \left(1 - \frac{2m}{M}\right)^2 \frac{v_0^2}{2} - M \left(1 - \frac{m}{M}\right)^2 \frac{v_0^2}{2} \approx \frac{3mv_0^2}{2}.$$

Легко заметить, что отношение энергий (расходов топлива) равно 1 : 3 для обоих наблюдателей.

**Решение 2.** Трение «подталкивает» Землю назад, тем самым ускоряет автомобиль вперед через его колеса. В земной системе отсчета (система координат Питера) работа произведена только на ускорение автомобиля, а не на Землю. С другой стороны, в системе отсчета поезда (система координат Пола) трение покоя, действующее на Землю, также работает. Рассматриваемое в этой системе координат отношение работ, произведенных на ускорение автомобиля в этих двух стадиях, равно 3 : 5, так как перемещения автомобиля за время  $t$  равны  $3v_0t/2$  и  $5v_0t/2$  соответственно. Работа, затраченная на ускорение Земли, равна 2 единицам, так как смещение Земли равно  $v_0t$ . Полная работа, таким образом, составляет  $3 - 2 = 1$  единицу на первой стадии ускорения и  $5 - 2 = 3$  единицы – на второй. Когда отношение работ рассматривается из поезда, оно снова равно 1 : 3.

**Р52.** В соответствии с условием обратимости лучей, если в первом случае расстояние от источника до линзы  $d$ , а расстояние от линзы до изображения  $f$ , то во втором случае эти расстояния меняются местами. Поскольку увеличение – это отношение этих расстояний, то  $(d/f)^2 = 9$  (или  $1/9$ ), откуда  $d/f = 3$  (или  $1/3$ ). Таким образом, линза делит расстояние между объектом и экраном на  $d = 30$  см (или 90 см) и  $f = 90$  см (или 30 см). Из формулы линзы находим фокусное расстояние:  $F = 22,5$  см.

Если бы световой поток, прошедший через линзу, в обоих случаях был один и тот же, то в девять раз меньшее изображение было бы в 81 раз ярче (поскольку меньшее изображение занимает на экране площадь в 81 раз меньше, чем большее). Однако, когда линза помещена на большем расстоянии от источника, она принимает только девятую часть светового потока, достигающего ее, когда она находится близко к источнику. В результате маленькое изображение оказывается только в девять раз ярче, чем большее.

**Р53.** Линзы очков близоруких людей – вогнутые. Пусть  $F$  – фокусное расстояние вогнутой линзы,  $l$  – расстояние между

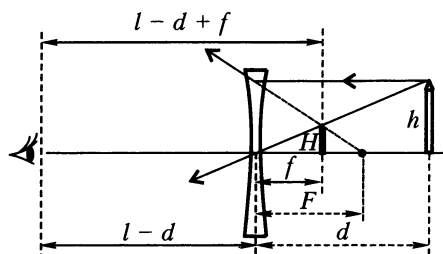


Рис. 137

ражением и линзой равно

$$f = \frac{dF}{d+F},$$

в то время как размер  $H$  изображения равен

$$H = h \frac{f}{d} = h \frac{F}{d+F}.$$

Размер изображения определяется углом  $\varphi$ , величина которого при малости угла определяется формулой

$$\varphi = \frac{H}{l-d+f} = \frac{hF}{d(l-d)+Fl}.$$

Этот угол как функция  $d$  минимален тогда, когда знаменатель выражения будет максимальный. Это условие выполняется при  $d = l/2$ . Другими словами, размер объекта самый маленький тогда, когда линза находится на равных расстояниях от глаза и объекта. Интересно, что это условие не зависит от фокусного расстояния линзы.

**Р54.** С углом  $\varphi$  (рис.138) дело обстоит так, как определено в подсказке:

$$n_{\text{ст}} \sin(\theta + \varphi) \geq n_{\text{в}}.$$

Согласно закону преломления (закону Снеллиуса), на входе луча в стекло получаем

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = n_{\text{ст}} \sin \varphi.$$

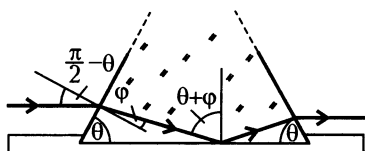


Рис. 138

Из геометрических построений легко показать, что угол падения луча на водную поверхность равен  $\theta + \varphi$ .

Чтобы произошло полное внутреннее отражение, необходимо выполнить условие

$$\theta + \varphi > \arcsin \frac{n_{\text{в}}}{n_{\text{ст}}}.$$

Отсюда, используя формулу  $\sin(\theta + \varphi) = \sin \theta \cos \varphi + \sin \varphi \cos \theta$  для исключения  $\varphi$ , получим

$$n_{\text{ст}}^2 - n_{\text{в}}^2 \geq (n_{\text{ст}}^2 + 1 - 2n_{\text{в}}) \cos^2 \theta.$$

Подстановка численных значений приводит к численному результату критического угла:

$$\cos \theta \leq \sqrt{\frac{n_{\text{ст}}^2 - n_{\text{в}}^2}{n_{\text{ст}}^2 + 1 - 2n_{\text{в}}}} = \sqrt{\frac{9/4 - 16/9}{9/4 + 1 - 8/3}} = 0,8997,$$

откуда

$$\theta \geq 25,9^\circ.$$

**Р55.** Будем считать, что световой пучок состоит из параллельных лучей света. Лучи пересекают первую поверхность призмы без изменения направления и попадают на искривленную поверхность цилиндра под различными углами падения. Нормали в точках падения лучей – это радиусы цилиндра. Чем выше положение луча света, тем больше его угол падения. На рисунке 139 показан ход луча для случая полного внутреннего отражения. Видно, что выйти из призмы смогут только лучи света, расположенные ближе к столу. Критический угол  $\alpha_{\text{к}}$  и минимальное расстояние  $R + x$  от передней поверхности призмы до ближайшей области светового пятна определяются из уравнений

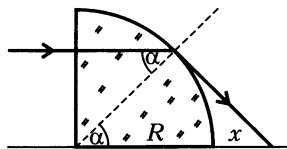


Рис. 139

$$\sin \alpha_{\text{к}} = \frac{1}{n} = \frac{2}{3}, \quad \cos \alpha_{\text{к}} = \frac{R}{R + x},$$

отсюда

$$R + x = 6,71 \text{ см.}$$

Теперь посмотрим, до какого максимального расстояния распространится световое пятно. Поскольку угол падения лучей, близких к поверхности стола, меньше  $\alpha_{\text{к}}$ , лучи за счет преломления отклоняются меньше и поэтому могли бы достичь поверхности стола еще дальше. Можно подумать, что пятно света могло бы распространиться до любого места вдоль стола, полагая, что свет, идущий у самого стола, вообще не преломляется.

Это, однако, является ложным. Путь каждого луча можно выразить как функцию от некоторого параметра (например, угла падения) и показать, что луч не удаляется очень далеко от стола. Но вместо утомительного вычисления самую отдаленную точку пятна света можно найти посредством простого трюка. Рассмотрим часть четверти цилиндра у самого стола как плосковыпуклую линзу. Фокусное расстояние  $F$  такой линзы рассчитывается по формуле

$$F = \frac{R}{n - 1}.$$

Это дает  $F = 10$  см, откуда получаем, что светлое пятно может распространиться вплоть до расстояния 10 см от передней поверхности призмы.

**Р56.** Пусть  $R_L$  – радиус Луны,  $R$  – расстояние от Луны до Земли,  $E$  – плотность потока прямого солнечного света (как на Земле, так и на Луне),  $I_L = \pi(R_L)^2 E$  – полный поток, который принимает на себя Луна,  $E_3 = \alpha I_L / (2\pi R^2)$  – плотность потока на Земле от Луны. Тогда отношение плотности потока солнечного света к плотности лунного на Земле равно

$$\frac{E}{E_3} = \frac{E}{\alpha I_L / (2\pi R^2)} = \frac{2}{\alpha} \left( \frac{R}{R_L} \right)^2 \approx 10^6.$$

Таким образом, солнечный свет примерно в миллион раз ярче, чем лунный свет.

*Примечание.* Коэффициент отражения Луны был измерен при сравнении яркости солнечного света и лунного света. Можно определить подобным образом и альбедо Земли, измеряя яркость темной части новой луны (или спутника), освещенной светом, отраженным от Земли.

**Р57.** Заметим некоторые особенности работы ног и мышц при ходьбе и беге.

При спокойной ходьбе тратится существенно меньше энергии, чем при беге. На основе этого можно высказать предположение в том, что

1) ноги при ходьбе совершают *свободные* колебания, причем время, затрачиваемое на каждый шаг, равно половине периода колебаний;

2) при беге тратится много энергии на *вынужденное* движение ног, для чего необходимо наличие просто тренированных мышц.

Сначала рассмотрим первое предположение. Давайте сведем удобную ходьбу к такой модели: нога человека подобна твердому массивному стержню, который может совершать свободные



колебания. Период свободных колебаний такого маятника равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgs}},$$

где  $I$  – момент инерции стержня,  $m$  – его масса,  $s$  – расстояние между осью качания маятника и центром масс стержня. Введем в рассмотрение эффективную длину по формуле  $L_{\text{эфф}} = I/(ms)$ . Тогда период колебаний можно записать в виде

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L_{\text{эфф}}}{g}}.$$

Так как момент инерции стержня пропорционален квадрату его длины, а расстояние до центра масс пропорционально его длине, то не будет большой ошибкой считать, что эффективная длина  $L_{\text{эфф}}$  пропорциональна длине ноги  $l$ . Из этого следует, что частота  $f$  переступания человека при ходьбе выражается формулой  $f \sim 1/\sqrt{l}$ .

Далее, опыт показывает, что шаг высокого человека почти всегда больше, чем невысокого. Отсюда следует, что длина шага пропорциональна длине ноги  $l$ . Теперь можем оценить скорость  $v_{\text{п}}$  пешехода:

$$v_{\text{п}} = lf \sim \sqrt{l}.$$

Отсюда видно, что люди с более длинными ногами имеют более быструю естественную походку.

Теперь обратимся ко второму предположению. При беге нога не качается свободно, а подвергается крутящему моменту сил  $M$ , который обеспечивается мускулами ноги. Как известно, чем сильнее человек, тем большей массой мускулов он обладает. Поэтому предполагаем, что  $M \sim L^3$ . Момент инерции  $I$  пропорционален произведению массы  $m$  на квадрат длины  $L$ . Масса  $m$  пропорциональна массе мускулов, т.е.  $m \sim L^3$ . Это дает оценку момента инерции:  $I \sim L^5$ . Частота колебаний  $f$  в этом случае оценивается так:

$$f \sim \sqrt{\frac{L^3}{L^5}} = \frac{1}{L}.$$

Затем, как и для пешехода, определим скорость бегуна:

$$v_{\text{б}} = Lf \sim L \frac{1}{L} = 1.$$

Из этого следует, что скорость бега мало зависит от длины ног.

Так наблюдения Энни и Энди можно объяснить с физической точки зрения.

**Р58.** Рассмотрим движения математического маятника длиной  $L$  и маятника в виде однородного стержня длиной  $l$  (рис. 140).

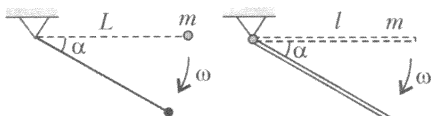


Рис. 140

Определим угловые скорости  $\omega$  маятников в зависимости от угла отклонения  $\alpha$  после того, как каждый из них начал движение из горизонтально-

го положения. Применим закон сохранения энергии.

Для математического маятника:

$$\frac{mL^2\omega^2}{2} = mgL \sin \alpha, \text{ откуда } \omega_m = \sqrt{\frac{2g}{L}} \sin \alpha.$$

Для стержня:

$$\frac{ml^2}{3} \frac{\omega^2}{2} = mg \frac{l}{2} \sin \alpha, \text{ откуда } \omega_c = \sqrt{\frac{3g}{l}} \sin \alpha.$$

Таким образом, отношение скоростей маятников при любом угле отклонения, а значит и в любой момент времени, равно

$$\frac{\omega_m}{\omega_c} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{l}{L}.$$

Отсюда следует, что при одинаковых длинах и угловой амплитуде период колебаний математического маятника в  $\sqrt{3/2} \approx 1,22$  больше периода колебаний тяжелого стержня.

**Р59.** Разумно предположить, что требуемая мощность  $P$  для зависающего вертолета зависит от гравитационного ускорения  $g$ , линейного размера вертолета  $L$ , средней плотности вертолета  $\rho$  и плотности воздуха  $\rho_v$ . Воспользуемся методом размерностей и запишем для нашей модели уравнение

$$[P] = [g]^\alpha [L]^\beta [\rho]^\gamma [\rho_v]^\delta.$$

После расшифровки размерностей получаем равенство

$$\text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^3 = (\text{м} / \text{с}^2)^\alpha \text{м}^\beta (\text{кг} / \text{м}^3)^\gamma (\text{кг} / \text{м}^3)^\delta,$$

которое приводит к системе линейных уравнений

$$\begin{cases} \gamma + \delta = 1, \\ \alpha + \beta - 3(\gamma + \delta) = 2, \\ -2\alpha = -3. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$\beta = \frac{7}{2}, \quad \alpha = \frac{3}{2} \text{ и } \gamma = 1 - \delta.$$

Заметим, что необходимая механическая мощность пропорциональна линейному размеру в степени  $7/2$ . Так как линейные размеры второго вертолета в два раза меньше, его двигатель должен иметь мощность  $P^* = 2^{-7/2} P = 0,088 P$ .

*Примечания.* а) Эффективность (КПД) механического двигателя можно охарактеризовать отношением мощности к массе двигателя, т.е. удельной мощностью. Согласно полученному результату, запишем

$$\frac{P}{m} \sim \frac{P}{L^3} \sim \sqrt{L},$$

т.е. требуемая эффективность увеличивается как корень из линейного размера. Это означает, что чем меньше вертолет, тем легче он может зависнуть. Существует много маленьких летающих животных (пчелы, стрекозы, колибри и т.д.), которые могут зависать подобно вертолету, но большие птицы на это не способны.

б) Используя простой анализ размерностей, мы смогли найти только сумму показателей степени  $\gamma$  и  $\delta$ . Однако ясно, что мощность  $P$  может зависеть только от произведения плотности  $\rho$  вертолета и ускорения  $g$  свободного падения, потому что, когда вертолет зависает, происходит компенсация его гравитационной, а не инертной массы. Таким образом,  $\gamma = \alpha = 3/2$  и  $\delta = -1/2$ . Наконец, мы получаем

$$P \sim (\rho g)^{3/2} L^{7/2} \rho_b^{-1/2} = (\rho g L^3) \sqrt{L g \frac{\rho}{\rho_b}}.$$

На поверхности земли, мы можем изменить только размер и плотность материала вертолета. Однако для использования вертолетов-роботов в других условиях полезно знать, как  $P$  зависит от гравитационного ускорения  $g$  и плотности  $\rho_b$  атмосферы заданной планеты.

**Р60.** При опрокидывании стержня его потенциальная энергия  $mgl(1 - \cos \theta)/2$  преобразуется во вращательную кинетическую энергию  $I\omega^2/2$ . Так как момент инерции стержня  $I$  относительно его конца равен  $ml^2/3$ , то получаем

$$\omega^2 = \frac{3g(1 - \cos \theta)}{l}.$$

Определим нормальное (центростремительное)  $a_n$  и тангенциальное  $a_t$  ускорения стержня. По определению,  $a_n = \omega^2 l/2$ ,

откуда

$$a_n = \frac{3g(1 - \cos \theta)}{2}.$$

Воспользовавшись выражением для момента силы тяжести:  $mg(l/2)\sin \theta$ , получим тангенциальное ускорение:

$$a_\tau = \frac{3g \sin \theta}{4}.$$

а) Гладкие горизонтальные и вертикальные стенки углубления могут привести только к нормальным силам реакции  $F_B$  и  $F_r$  (рис.141). Стержень потеряет контакт со столом, как только одна из этих сил станет равна нулю. Условия равновесия в опоре выглядят следующим образом:

$$F_r = m(a_\tau \cos \theta - a_n \sin \theta),$$

$$mg - F_B = m(a_n \cos \theta + a_\tau \sin \theta).$$

При решении этих двух уравнений, с учетом найденных ускорений, для сил реакции получаем

$$F_r = 3mg \frac{3 \cos \theta - 2}{4} \sin \theta,$$

$$F_B = mg \frac{(3 \cos \theta - 1)^2}{4}.$$

Рис. 141

Горизонтальная составляющая реакции опоры при увеличении угла  $\theta$  обращается в ноль раньше, чем вертикальная. Поэтому угол, при котором потеряется контакт с опорой, равен

$\theta_k = \arccos(2/3) \approx 48^\circ$ . При больших углах горизонтальная сила реакции была бы отрицательной, так что стержень действительно теряет контакт со столом, отрывается от вертикальной стенки углубления и движется прочь от него.

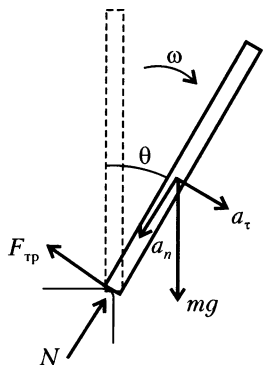


Рис. 142

б) В этом случае нормальная сила реакции  $N$  всегда направлена по оси стержня, а сила трения  $F_{тр} \neq 0$  направлена по касательной к краю стола и перпендикулярна оси стержня (рис.142).

Сумма составляющей силы тяжести стержня вдоль стержня и нормальной силы реакции стола сообщает стержню

центростремительное ускорение:

$$mg \cos \theta - N = ma_n = \frac{m l \omega^2}{2} = 3mg \frac{1 - \cos \theta}{2}.$$

Таким образом, нормальная сила реакции равна

$$N = mg \frac{5 \cos \theta - 3}{2}.$$

Реакция стола на стержень становится нулевой, когда  $N = 0$ , т.е. когда  $\theta = \arccos(3/5) \approx 53^\circ$ . Под большими углами стержень теряет контакт со столом. Из-за грубого края сила трения всегда достаточно большая, чтобы предотвратить скольжение, исключая случай, когда нормальная сила становится нулевой; следовательно, она не имеет никакого воздействия на движение.

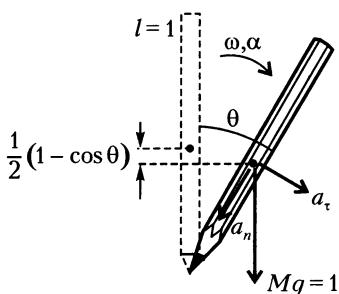
*Примечание.* В этой задаче мы рассмотрели два экспериментальных случая. Заметим, что направление нормальной силы реакции перпендикулярно общей касательной к краю стола и основанию стержня; это означает, что она может действовать в любом направлении. Отсюда следует, что движение падающего стержня сильно зависит от геометрии касающихся поверхностей и значений коэффициента трения.

**Р61.** Предположим сначала, что поверхность стола является очень гладкой (коэффициент трения очень маленький). После того как карандаш выпустили, его центр масс ускоряется в направлении падения и приобретает горизонтальную и вертикальную скорости. Горизонтальная составляющая ускорения центра масс появляется за счет хоть и малой, но все-таки имеющейся силы трения между острием карандаша и столом. Поэтому вскоре кончик карандаша начинает скользить влево, «толкая» центр масс вправо.

Если трение очень большое, то в течение относительно долгого времени кончик карандаша остается на месте, а центр масс движется по окружности с центром в месте контакта. При этом горизонтальная составляющая скорости центра масс сначала увеличивается в направлении падения, а потом (после  $45^\circ$ ) начинает уменьшаться и может достичь нуля, если кончик карандаша не потерял контакта со столом (например, приклеен) при горизонтальном положении. Знак горизонтального ускорения центра масс, таким образом, так же, как и знак силы трения, изменяется в течение движения. Если карандаш не скользит в течение первой стадии, то он может только скользить вперед, т.е. в направлении падения.

Впоследствии мы собираемся доказать, что кончик карандаша никогда не теряет контакта со столом, как бы он ни сколь-

зил. Ради математической простоты будем использовать единичные значения силы тяжести, длины карандаша, и гравитационного ускорения. Таким образом, расстояние центра масс (ЦМ) карандаша равно  $1/2$  от любого конца, момент инерции



карандаша относительно его ЦМ равен  $1/12$ , а относительно одного из его концов он равен  $1/3$ .

В течение первой стадии движения кончик карандаша не скользит, и карандаш вращается относительно своего острия (рис.143). Мы можем найти угловую скорость карандаша на основе закона сохранения энергии:

Рис. 143

$$\frac{1}{2}(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \omega^2,$$

откуда для угловой скорости получаем

$$\omega = \sqrt{3(1 - \cos \theta)}.$$

Так как мгновенный крутящий момент равен  $\sin \theta/2$ , угловое ускорение  $\alpha$  карандаша определяется по формуле

$$\alpha = \frac{3}{2} \sin \theta.$$

Имеются две силы, действующие вертикально на карандаш: его сила тяжести, равная 1, и нормальная составляющая силы реакции стола  $N$ . Вертикальная составляющая центростремительного ускорения ЦМ равна  $(\omega^2 \cos \theta)/2$ , а вертикальная составляющая тангенциального ускорения равна  $(\alpha \sin \theta)/2$ . Таким образом, в вертикальном направлении уравнение движения ЦМ записывается в виде

$$1 - N = \frac{1}{2} \alpha \sin \theta + \frac{1}{2} \omega^2 \cos \theta,$$

откуда получаем

$$N = \left( \frac{3 \cos \theta - 1}{2} \right)^2.$$

Кажется, что сила реакции никогда не может стать отрицательной и поэтому острие карандаша не может потерять контакт со столом в течение всей вращательной фазы движения. Нормальная сила реакции равна нулю, когда  $\theta = \arccos(1/3) \approx 70,5^\circ$ . Это означает, что сила трения при этом тоже равна нулю, и карандаш будет скользить, если он не скользил прежде.

Запишем теперь уравнение движения ЦМ по горизонтали:

$$F = \frac{1}{2} \alpha \cos \theta - \frac{1}{2} \omega^2 \sin \theta,$$

где  $F$  – сила трения. Подставляя сюда выражения углового ускорения  $\alpha$  и угловой скорости  $\omega$ , получаем

$$F = \frac{3}{4} \sin \theta \cdot (3 \cos \theta - 2).$$

Условие скольжения выглядит так:  $|F| > \mu N$ , где  $\mu$  – коэффициент (статического) трения. Мы можем переформулировать это условие с помощью функции  $f(\theta)$ , которая выражается через абсолютное значение отношения сил  $F/N$ :

$$f(\theta) = \left| \frac{F}{N} \right| = \left| 3 \sin \theta \cdot \frac{3 \cos \theta - 2}{(3 \cos \theta - 1)^2} \right| > \mu.$$

Функция  $f(\theta)$  изображена на рисунке 144.

Сила трения изменяет знак, когда угол  $\theta$  становится равным

$$\theta = \arccos \frac{2}{3} \approx 48^\circ.$$

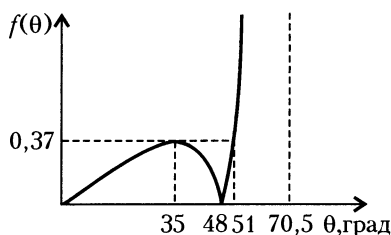


Рис. 144

Это означает, что скольжение назад может происходить в области  $0 < \theta < 48^\circ$ . При использовании числовых методов нетрудно показать, что в этой области  $f(\theta)$  имеет максимальное значение  $\mu_{\text{крит}} \approx 0,37$  при  $\theta \approx 35^\circ$ . Следовательно, карандаш скользит назад, если  $\mu < \mu_{\text{крит}}$ . Если же  $\mu > \mu_{\text{крит}}$ , то острие скользит вперед до тех пор, пока угол не достигнет величины  $\theta \approx 70,5^\circ$ , при котором  $f(\theta)$  стремится к бесконечности. (Обратите внимание на то, что карандаш не может начать скользить в диапазоне  $35^\circ < \theta < 51^\circ$ .)

Движения кончика карандаша назад и вперед показаны на рисунке 145. В обоих случаях скользящая точка карандаша может опять остановиться.

Наконец, покажем, что острие карандаша никогда не теряет контакта со столом. Рассмотрим сначала случай скольжения вперед, показанный на рисунке 146. Используя теорему косинусов для (векторных) треугольников, запишем уравнение, выражающее закон сохранения энергии:

$$\frac{1 - \cos \theta}{2} = A_{\text{тр}} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{12} \omega^2 + \left( \frac{\omega}{2} \right)^2 + v_0^2 + 2v_0 \cdot \frac{1}{2} \omega \cos \theta \right).$$

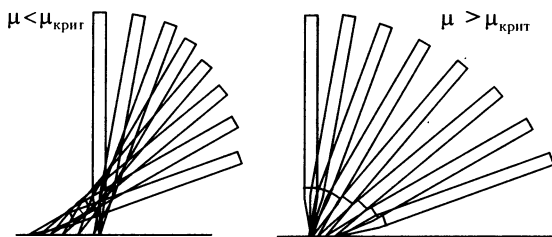


Рис. 145

Если мы пренебрегаем работой трения  $A_{тр}$  и двумя членами, содержащими скорость  $v_0$  острия карандаша (все три члена положительны), то для угловой скорости мы получаем также неравенство:

$$\omega^2 < 3(1 - \cos \theta).$$

Уравнение мгновенного крутящего момента относительно ЦМ дает

$$N \frac{\sin \theta + \mu \cos \theta}{2} = \frac{\alpha}{12},$$

а уравнение движения для вертикального направления записывается в виде

$$1 - N = \frac{1}{2} \alpha \sin \theta + \frac{1}{2} \omega^2 \cos \theta,$$

Рис. 146

т.е. имеет точно такой же вид, как и раньше для случая, в котором нет скольжения. Причина этому та, что острый карандаш имеет только горизонтальное ускорение, и, таким образом, вертикальная составляющая ускорения ЦМ остается неизменной (рис. 147).

Из двух уравнений, приведенных выше, мы можем выразить нормальную силу  $N$  как функцию  $\theta$  и  $\omega^2$ . С учетом неравенства для  $\omega^2$  получаем неравенство для  $N$ :

$$\begin{aligned} N &= \frac{1 - (\omega^2 \cos \theta)/2}{1 + 3 \sin \theta \cdot (\sin \theta + \mu \cos \theta)} > \\ &> \frac{(3/2)(\cos \theta - (1/2))^2 + (5/8)}{1 + 3 \sin \theta \cdot (\sin \theta + \mu \cos \theta)} > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, нормальная сила реакции всегда положительна, а значит, кончик карандаша не теряет контакта со столом.

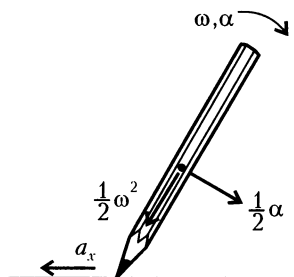


Рис. 147



Для случая, в котором скольжение направлено назад, метод рассуждений аналогичный. На рисунке 148 показаны горизонтальная и вертикальная составляющие скорости ЦМ ( $v_x$  и  $v_y$  соответственно). Так как острое карандаша имеет нулевую вертикальную скорость, то между  $v_y$  и  $\omega$  имеется такая связь:  $v_y = (\omega \sin \theta)$  2. Мы можем снова использовать закон сохранения энергии:

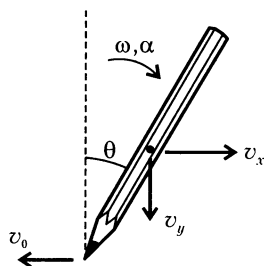


Рис. 148

$$\frac{1 - \cos \theta}{2} = A_{\text{тр}} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{12} \omega^2 + v_x^2 + v_y^2 \right).$$

В этом уравнении мы опять пренебрегаем работой  $A_{\text{тр}}$  против сил трения и другим положительным членом, содержащим  $v_x$ , и получаем

$$\omega^2 < \frac{1 - \cos \theta}{(1/12) + (1/4) \sin^2 \theta}.$$

Рассматривая снова полный крутящий момент относительно ЦМ и уравнение движения для вертикальной составляющей, получаем для нормальной силы реакции  $N$  неравенство

$$N = \frac{1 - (\omega^2 \cos \theta)/2}{1 + 3 \sin \theta \cdot (\sin \theta - \mu \cos \theta)} > \frac{1 + 3(\cos \theta - 1)^2}{(1 + 3 \sin \theta \cdot (\sin \theta - \mu \cos \theta))(1 + 3 \sin^2 \theta)}.$$

Здесь числитель всегда положителен, а знаменатель положителен (при  $0 \leq \theta \leq 90^\circ$ ), если  $\mu < 4/3$ . Однако в области скольжения назад  $\mu < 0,37$ ; таким образом, снова получаем, что острое карандаша не теряет контакта со столом.

Если острое карандаша на некоторой стадии прекращает скользить, оно тоже не может потерять контакт со столом, потому что тогда

$$\omega^2 < 3(1 - \cos \theta),$$

и, таким образом,  $N > (3 \cos \theta - 1)^2/4 \geq 0$  (см. первую часть решения).

**Р62.** Давление в мыльном пузырьке радиусом  $R$  больше, чем атмосферное давление  $p_0$ , на  $\Delta p = 4\sigma R$ , где  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения воды. Множитель «4» возникает потому, что должны быть приняты во внимание две поверхности

оболочки пузырька. Ясно, что давление больше в пузырьке меньшего радиуса, и поэтому воздух течет в больший пузырек, раздувая его, чтобы, наконец, сформировать единственный пузырек радиусом  $R_3$ .

Объем воздуха в пузырьках пропорционален  $R^3$ , и поэтому из уравнения состояния для идеального газа и закона сохранения массы получаем

$$\left(p_0 + \frac{4\sigma}{R_1}\right)R_1^3 + \left(p_0 + \frac{4\sigma}{R_2}\right)R_2^3 = \left(p_0 + \frac{4\sigma}{R_3}\right)R_3^3.$$

Для пузырьков обыкновенного размера  $\Delta p \ll p_0$  (на много порядков меньше). С учетом этого найдем радиус конечного пузырька:

$$R_3 \approx \sqrt[3]{R_1^3 + R_2^3}.$$

Если точность измерения радиусов высока, то для определения коэффициента поверхностного натяжения можно использовать следующую формулу:

$$\sigma = \frac{p_0}{4} \frac{R_3^3 - R_1^3 - R_2^3}{R_1^2 + R_2^2 - R_3^2}.$$

Однако на практике этот метод применить очень сложно, поскольку числитель практически равен нулю.

**Р63.** Если между двумя параллельными пластинами, смачиваемыми водой, поместить небольшое количество воды, то пластины будут притягиваться друг к другу вплоть до того, что вся

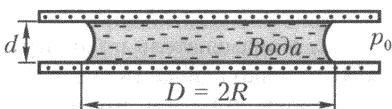


Рис. 149

поверхность пластин будет смочена водой. При этом форма края в поперечном сечении представляет собой полукруг радиусом  $r = d/2$  (рис.149). Так как поверхность воды в этом месте

вогнутая, то внутри воды давление меньше атмосферного на  $\Delta p = \sigma/r$ , где  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения воды.

Если умножим  $\Delta p$  на площадь водяного пятна (диска), то получим силу, с которой сжимаются пластины:

$$F = \frac{\pi R^2 \sigma}{r}.$$

*Примечание.* Если между стеклянными пластинами попадает вода, то для разделения пластин их надо сдвигать в сторону, а не пытаться оттащить друг от друга.

**Р64.** Пусть вся нить помечена рисками через одинаковые интервалы длины  $\Delta x$ . Предположим, что  $0$  – координата стены,  $l$  – координата паука при  $t = 0$ ,  $x_0$  – координата гусеницы при  $t = 0$ ,  $v_0$  – скорость, с которой паук тянет нить, находясь на месте,  $v_r$  – скорость гусеницы, которая старается убежать к стене, относительно нити (рис.150). Считаем, что, если паук тянет за нить так, что скорость нити с координатой  $x_0$  всегда

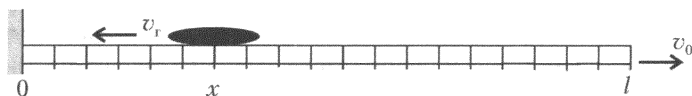


Рис. 150

равна  $v_0$ , то нить растягивается равномерно. Из этого следует, что скорость  $v_x$  любого места на нити с координатой  $x > 0$  меньше  $v_0$  и определяется формулой  $v_x = \alpha_x v_0$ . Это верно и для координаты  $x_0$ , для которой  $\alpha x_0 = \alpha_0$ . Поэтому скорость  $v$  гусеницы относительно стены в первый момент определяется формулой  $v = -v_r + \alpha_0 v_0$ .

Если в первый момент, когда началось движение, выполняется условие  $v_r < \alpha_0 v_0$ , то гусеница будет двигаться к пауку со все большей скоростью, т.е. ее положение безнадежно.

С другой стороны, если  $v_r > \alpha_0 v_0$ , то скорость движения гусеницы к стене будет больше нуля, мало того, она будет увеличиваться и дальше, как бы паук ни старался, поэтому гусеница достигнет стены.

Если же в первый момент  $v_r = \alpha_0 v_0$ , то скорость гусеницы относительно земли равна нулю и будет такой оставаться и в дальнейшем, поэтому паук будет наблюдать свой завтрак изда- лека.

**Р65.** Пусть вся нить помечена рисками через одинаковые интервалы длины  $\Delta x$ . Предположим, что  $0$  – координата стены,  $l$  – координата паука при  $t = 0$ ,  $x_0$  – координата гусеницы при  $t = 0$ ,  $x$  – координата гусеницы при  $t > 0$ ,  $v_0$  – скорость паука, который убегает с концом нити,  $v_r$  – скорость гусеницы относительно нити, с которой гусеница перемещается по нити, стараясь убежать к стене.

Заметим, что точка нити с координатой  $x_0$  через время  $t$  будет иметь координату  $x_0(l + tv_0)/l$ . За то же время гусеница отползет по нити на  $tv_r$ . Значит, она переместится относительно стенки на расстояние

$$x = \frac{x_0(l + tv_0)}{l} + (-tv_r) = x_0 + \left( \frac{x_0 v_0}{l} - v_r \right) t.$$

Если  $x = 0$ , то гусеница остается на месте при любом  $t$ , откуда следует условие:  $v_r = x_0 v_0 / l$ . Гусеница достигнет стены при  $v_r > x_0 v_0 / l$ , как и в предыдущей задаче. При  $v_r < x_0 v_0 / l$  гусеница будет только удаляться от стены.

**Р66.** а) Пусть сначала шарик падает с высоты  $h = 1$  м вниз свободно, ударяется о самый нижний гвоздь, прыгает фактически горизонтально по ряду близко расположенных гвоздей около края основания доски, как по кочкам, и достигает точки  $B$ . Продолжительность вертикального падения составляет  $t_1 = \sqrt{2h/g} \approx 0,45$  с. В конце этого падения шарик достигает скорости  $v_1 \approx 4,4$  м/с, после чего проходит остающееся расстояние  $l = 2$  м по горизонтали за время  $t_2 = l/v_1 \approx 0,45$  с.

Если шарик будет лететь по прямому участку  $AB$  (с ускорением  $g/\sqrt{5} < g$ ), то точки  $B$  он достигнет за 1,01 с, что явно больше 0,9 с.

Таким образом, *самый быстрый* путь, по которому шар может добраться от  $A$  до  $B$ , не является *самым коротким* маршрутом.

*Примечание.* Можно доказать посредством непростой математики (используя вариационное исчисление), что кривая, время прохождения по которой самое короткое, является циклоидой.

б) Тело, брошенное из состояния покоя в точке  $A$ , имеет максимальную вертикальную скорость, если оно находится в свободном падении. Его максимальная кинетическая энергия и, следовательно, его максимальная скорость определены исключительно величиной его вертикального смещения. Таким образом, подпрыгивающий шарик не может достигнуть основания доски быстрее, чем тело в свободном падении, т.е. за время меньше чем  $t_1 \approx 0,45$  с.

**Р67.** Затрудняющим моментом решения задачи является недостаточность данных, однако в качестве дополнительного источника информации можно использовать рисунок к задаче.

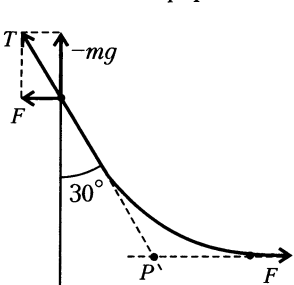


Рис. 151

С помощью транспорта определяем угол между стеной и закрепленным концом веревки (рис.151), он оказывается равным  $30^\circ$ . Можем определить силу натяжения в закрепленном конце:  $T = F/\sin 30^\circ = 40$  Н. Сила тяжести веревки равна вертикальной составляющей силы натяжения:  $mg = T \cos 30^\circ = 34,6$  Н, откуда находим массу веревки:  $m \approx 3,5$  кг.

*Примечание.* Еще некоторую информацию можно получить из рисунка. Так, центр тяжести веревки должен находиться на вертикали выше точки  $P$ , потому что линии действия всех трех сил, приложенных к веревке, должны встретиться в единственной точке.

**Р68.** Используя факт, описанный в подсказке, можно показать, что ножки измерителя должны иметь такой раcтвор (угол между ножками измерителя), чтобы одна из его ножек была расположена горизонтально.

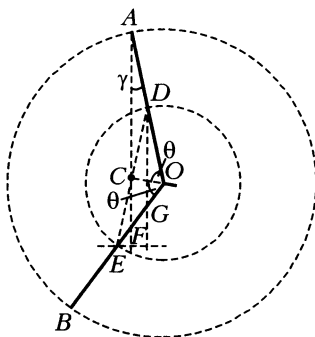


Рис. 152

На рисунке 152 показано равновесие измерителя, подвешенного в точке  $A$ , при угле раствора  $2\theta$ . Здесь прямые  $AO$  и  $BO$  – ножки измерителя (длина каждой равна  $l$ ), точки  $D$  и  $E$  – центры масс ножек измерителя (они совпадают с их серединами), точка  $C$  – центр масс всей системы (так как массы ножек одинаковы, то точка  $C$  делит отрезок  $DE$  пополам и принадлежит биссектрисе угла при вершине  $O$ ), отрезок  $DG$  параллелен отвесу, который, конечно же, проходит через точку  $C$ . Пунктирные окружности радиусом  $l$  и  $l/2$  даны для помощи при построении.

Отрезки  $OG$  и  $GF$  равны, так как прямая  $DG$  параллельна  $AF$ , а точка  $D$  делит отрезок  $AO$  пополам. Отрезки  $GF$  и  $FE$  тоже равны, так как треугольник  $DOE$  равнобедренный, прямая  $CF$  параллельна  $DG$ , а точка  $C$  делит отрезок  $DE$  пополам. Из этого следует, что отрезок  $OE$  делится точками  $G$  и  $F$  на три равные части. Плечи центров масс ножек определяются как проекции отрезков  $GF$  и  $FE$  на горизонталь, поэтому они равны при любом угле раствора измерителя, а величина проекции  $r$  находится по формуле

$$r = \frac{l \sin \gamma}{2}.$$

Таким образом, для нахождения максимального значения плеча  $r$  необходимо продифференцировать предыдущее выражение по углу  $\gamma$ , который зависит от угла раствора  $2\theta$  измерителя.

Попробуем разобраться с углами. Рассмотрим треугольник  $DGO$ . Мы уже знаем, что  $DO = l/2$ ,  $GO = l/6$  и  $\angle DOG = 2\theta$ . Кроме того,  $\angle ODG = \gamma$ . Применим теорему косинусов, чтобы

найти сторону  $DG$ :

$$DG^2 = GO^2 + DO^2 - 2GO \cdot DO \cdot \cos 2\theta = \left(\frac{l}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{9} - \frac{2}{3} \cos 2\theta\right),$$

откуда

$$DG = l \frac{\sqrt{2}}{6} \sqrt{5 - 3 \cos 2\theta}.$$

Теперь из теоремы синусов для треугольника  $DGO$  получаем

$$\frac{\sin \gamma}{GO} = \frac{\sin 2\theta}{DG},$$

откуда

$$\sin \gamma = \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{2(5 - 3 \cos 2\theta)}}.$$

Таким образом, величина плеча  $r$  центра масс равна

$$r = \frac{l}{2} \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{2(5 - 3 \cos 2\theta)}}.$$

Для определения максимума  $r$  продифференцируем это выражение по  $\theta$  и приравняем его к нулю:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{l}{2^{3/2}} \frac{2 \cos 2\theta \cdot (5 - 3 \cos 2\theta) - 3 \sin^2 2\theta}{(5 - 3 \cos 2\theta)^{3/2}} = 0.$$

После простых преобразований приходим к уравнению

$$3 \cos^2 2\theta_0 - 10 \cos 2\theta_0 + 3 = 0,$$

откуда найдем

$$\cos 2\theta_0 = \frac{1}{3}.$$

Полезно подставить это значение в формулу для  $\sin \gamma$ , тогда получим

$$\sin \gamma_0 = \frac{\sqrt{1 - (1/3)^2}}{\sqrt{2(5 - 3(1/3))}} = \frac{1}{3}.$$

Этот замечательный результат:  $\sin \gamma_0 = \cos 2\theta_0$  означает, что оставшийся третий угол прямой:  $\angle DGO = \pi/2$ . Короче говоря, мы доказали, что вершина измерителя максимально удалена от вертикали, проходящей через точку подвеса, в том случае, если одна из ножек измерителя горизонтальна.

Теперь легко показать, что  $\sin^2 \theta_0 = 1/3$ .

*Примечание.* Зная, что вертикаль, проходящая через точку подвеса, при условии максимального плеча  $r$  центра масс должна быть перпендикулярна второй ножке измерителя, угол  $2\theta_0$  раствора измерителя можно легко найти, воспользовавшись простым рисунком.

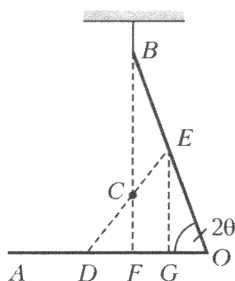


Рис. 153

На рисунке 153 проведены две вертикальные линии, одна — через общий центр масс  $C$  измерителя, а другая — через центр масс  $E$  отдельно верхней ножки. Из рисунка хорошо видно, что отрезок  $DO$  делится точками  $F$  и  $G$  на три равные части. Ну, а теперь легко найти любой угол, в том числе и угол  $2\theta_0 = \arccos(1/3)$ .

**Р69.** Очевидно, что центр масс  $S$  треугольной пластины должен находиться ниже точки подвешивания. Обозначим векторы, указывающие от центра масс  $S$  до вершин треугольника, через  $\vec{r}_1$ ,  $\vec{r}_2$  и  $\vec{r}_3$ , до точки подвешивания — через  $\vec{m}$ , а вектор силы тяжести — через  $M\vec{g}$  (рис. 154). Силы  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  и  $\vec{F}_3$ , благодаря которым нити удерживают пластину, можно записать в виде

$$\vec{F}_i = \lambda_i (\vec{m} - \vec{r}_i), \quad \text{где } i = 1, 2, 3.$$

Так как пластина находится в равновесии, векторная сумма сил, действующих на нее, равна нулю:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + M\vec{g} = 0.$$

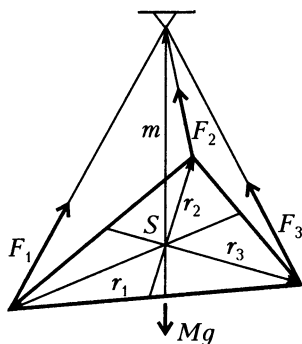


Рис. 154

При использовании того факта, что вектор, указывающий на центр масс треугольника (начало векторной системы координат), является средним арифметическим векторов, указывающих на его вершины, мы получаем

$$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 = 0.$$

Так как векторы  $M\vec{g}$  и  $\vec{m}$  лежат на одной прямой, то можно записать  $M\vec{g} = -k\vec{m}$ . Тогда из приведенных уравнений получаем

$$(\lambda_3 - \lambda_1)\vec{r}_1 + (\lambda_3 - \lambda_2)\vec{r}_2 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - k)\vec{m} = 0.$$

Поскольку векторы  $\vec{r}_1$ ,  $\vec{r}_2$  и  $\vec{m}$  не находятся в одной плоскости, линейная комбинация их может быть нулевой только тогда, когда коэффициенты при каждом векторе равны нулю.

Таким образом,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ , откуда следует, что напряжения в нитях пропорциональны их длинам.

Этот вывод стал бы необоснованным, если бы одна из нитей была ненатянута, так как плоскость пластины тогда стала бы вертикальной и вектор  $\vec{m}$  лежал бы в этой плоскости.

**Р70.** Первоначально железнодорожная цистерна и жидкость в ней находятся в покое. Поскольку сливная труба расположена сзади цистерны, то, если открыть кран, центр масс жидкости будет перемещаться назад. Поскольку центр масс всей системы неподвижен, сама цистерна должна двигаться вперед. Но сливная труба вертикальна, так что появляющаяся жидкость приобретет горизонтальный импульс, направленный вперед. Это не противоречит закону сохранения импульса, потому что жидкость внутри цистерны будет перемещаться назад (относительно земли). Однако движение цистерны вперед впоследствии замедляется и прекращается. Динамическая причина этого – сила, возникающая внутри цистерны со стороны перемещающейся назад жидкости.

*Примечания.* а) Может быть так, что направление перемещения железнодорожной цистерны изменяется несколько раз в процессе движения, но детальный анализ фактически невозможен, поскольку это зависит от слишком многих параметров.

б) Дадим сценарий решения задачи, предложенной в подсказке. Рассмотрим ситуацию, когда студент достиг конца вагона и остановился, но контролер продолжает перемещаться назад со скоростью  $u = mv/(M + 2m)$  относительно вагона. В соответствии с законом сохранения импульса, вагон должен двигаться со скоростью, определяемой уравнением

$$mu = \frac{m^2 v}{M + 2m}.$$

Таким образом, когда студент соскакивает с подножки, он уносит импульс, направленный вперед. Когда контролер останавливается, вагон (вместе с контролером) изменяет свое направление движения и перемещается назад, имея полный импульс, равный  $-mu$ . Таким образом, величина конечной скорости вагона находится по формуле

$$V = \frac{m^2 v}{(M + 2m)(M + m)}.$$

**Р71.** За положительное направление принимаем движение вправо и рассматриваем движение в системе координат центра



масс бусинок (рис. 155). Так как их центр масс  $ЦМ$  находится в покое, то в выбранной системе координат отношение скоростей бусинок остается постоянным (равным  $M/m$ ) в течение всего движения. Поэтому можно записать

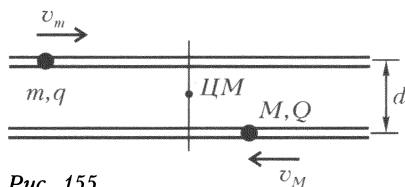


Рис. 155

$$v_m = \frac{M}{M+m} v_0, \quad v_M = \frac{m}{M+m} v_0.$$

По мере того как бусинки приближаются друг к другу, их скорости уменьшаются, если заряды  $q$  и  $Q$  одного знака, и увеличиваются, если их заряды противоположны по знаку. В последнем случае, если расстояние  $d$  достаточно велико, их скорости вернуться к своим начальным значениям, так как потерь энергии нет. В неподвижной системе отсчета после временного ускорения тело массой  $m$  начинает замедляться, пока его скорость не достигнет первоначального значения  $v_0$ , а тело массой  $M$  будет иметь нулевую скорость, но сдвинется влево на некоторое расстояние.

Если бусинки отталкиваются друг от друга, то требуется более детальное рассуждение. При достаточно большой начальной энергии бусинки проходят мимо друг друга и расходятся, причем их скорости возвращаются к своим первоначальным значениям. С другой стороны, если их начальная кинетическая энергия слишком мала для того, чтобы они сблизилась до расстояния  $d$ , то они «поворачивают обратно». В системе центра масс тело массой  $m$  перемещается влево со скоростью  $-v_m$ , а тело массой  $M$  движется вправо со скоростью  $v_M$  (рис. 156). Это произойдет, если выполнится условие

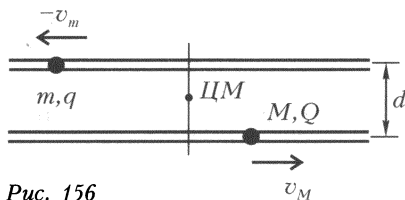


Рис. 156

$$\frac{mv_m^2}{2} + \frac{Mv_M^2}{2} < \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{d},$$

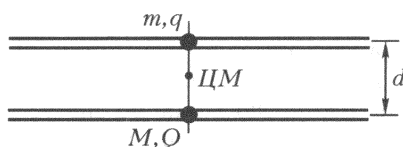
или

$$\frac{Mm}{M+m} \frac{v_0^2}{2} < \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{d}.$$

Величина  $Mm/(M+m)$  называется приведенной массой системы. Скорости  $v_m^*$  и  $v_M^*$  тел в неподвижной (лабораторной) системе координат получаются при добавлении скорости системы центра масс к относительным скоростям каждой бусинки. Поэтому имеем

$$v_m^* = \frac{m-M}{M+m} v_0, \quad v_M^* = \frac{2M}{M+m} v_0.$$

В случае малой начальной кинетической энергии, когда эти бусинки сближаются до расстояния  $d$ , они останавливаются



относительно друг друга (рис.157), но в лабораторной системе координат они продолжают движение с общей скоростью

Рис. 157

$$v_m^* = v_M^* = \frac{mv_0}{M+m}.$$

**Примечание.** Три случая, обсужденные выше, моделируют одномерные механические столкновения. Случай ограничения, когда два тела приближаются друг к другу, моделирует неупругое столкновение. При этом только механический импульс остается постоянным, механическая же энергия уменьшается. Скорости в случае, в котором тела приближаются друг к другу и затем снова удаляются, — те же самые, что были вычислены с помощью законов упругих столкновений (сохранение энергии и импульса). Движение, в котором тела проходят друг через друга (в сущности, они не сталкиваются и сохраняют свои первоначальные скорости), — очевидно в соответствии с законами сохранения. Однако решение, описывающее этот случай, обычно не используется для механических столкновений, так как тела не могут проходить друг через друга.

**Р72.** а) Удар неупругий. Пусть  $v_0$  — общая скорость бусинок,  $d$  — первоначальное расстояние между бусинками и  $m$  — масса одной бусинки. За интервал времени  $\Delta t$  в движение вовлекается группа бусинок в количестве  $v_0 \Delta t / d$ , которая имеет массу  $\Delta m = mv_0 \Delta t / d$  и импульс  $\Delta p = \Delta m v_0 = mv_0^2 \Delta t / d$ . Согласно второму закону Ньютона,

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{mv_0^2}{d}.$$

Отсюда получаем значение окончательной скорости  $v_0$  в случае

неупругих столкновений:

$$v_0 = \sqrt{\frac{Fd}{m}}.$$

б) При упругом столкновении между двумя телами с одинаковыми массами тела обмениваются скоростями. В частности, если одно из тел вначале покоилось, то после удара первоначально перемещающееся тело останавливается, в то время как второе откатывается с той же самой скоростью, которой первоначально обладало первое.

Крайняя слева бусинка под действием внешней силы  $F$  равномерно ускоряется и, перед тем как случается первое столкновение, достигает скорости  $v_1 = \sqrt{2Fd/m} = \sqrt{2}v_0$ . При ударе она передает свою скорость второй бусинке и останавливается, после чего начинает ускоряться снова вследствие действия внешней силы.

Что происходит со второй бусинкой? Она движется с постоянной скоростью  $v_1$ , сталкивается с третьей бусинкой и останавливается. Третья и последующие бусинки ведут себя точно так же, и «ударная волна» распространяется вперед со скоростью  $v_1$ . Тем временем, крайняя слева бусинка снова ускоряется до скорости  $v_1$ , сталкивается со второй бусинкой, которая находится теперь в покое, и процесс повторяется, начиная, таким образом, новую «ударную волну». Скорость ускоренной бусинки изменяется равномерно от нуля до  $v_1$ , поэтому ее среднее значение равно

$$\frac{v_1}{2} = \frac{v_0}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{Fd}{2m}}.$$

*Примечание.* Также интересен случай частично упругих столкновений. В этом случае (согласно результатам моделирования на компьютере) можно сказать, что рано или поздно взаимодействующие бусинки собираются в отдельную группу, которая ведет себя подобно совершенно неупругому телу, двигаясь с конечной скоростью  $v_0 = \sqrt{Fd/m}$ . Время, необходимое для того, чтобы группа собралась, зависит от степени упругости (коэффициента восстановления). Чем более упруги элементарные столкновения, тем больше требуется времени для образования неупругой группы.

**Р73.** В первый момент, пока струя пива не достигла дна кувшина, равновесие нарушится – платформа весов качнется вверх. После того, как струя коснется дна кувшина, равновесие восстановится. Дело в том, что любой элемент струи, падая на

дно кувшина, сообщает платформе импульс силы, направленный вертикально вниз. С другой стороны, этот элемент, покинув бочку, перестает оказывать давление на ее дно, что эквивалентно появлению такого же по величине импульса силы, но действующего на платформу вертикально вверх. Таким образом, пока струя пива течет непрерывно, весы будут находиться в равновесии. Но вот в момент, когда струя прекращается, платформа весов качнется вниз, поскольку последние элементы жидкости, падая на дно кувшина, действуют на платформу с силой, превышающей вес.

**Р74.** Пусть  $S$  – поперечное сечение поступающей водной струи,  $v$  – ее скорость,  $\rho$  – плотность воды. Тогда масса воды, затекающей в желоб за единицу времени, равна  $\rho Sv$ . Это количество воды имеет кинетическую энергию  $\rho Sv^3/2$  и горизонтальный импульс  $\rho Sv^2 \sin \alpha$ . Эти величины не могут изменяться, если пренебречь вязкостью воды, поэтому запишем

$$\frac{\rho Sv^3}{2} = \frac{\rho S_1 v_1^3}{2} + \frac{\rho S_2 v_2^3}{2},$$

$$\rho Sv^2 \sin \alpha = \rho S_1 v_1^2 - \rho S_2 v_2^2,$$

где  $S_1$  и  $S_2$  – площади поперечного сечения воды, вытекающей из желоба направо и налево,  $v_1$  и  $v_2$  – соответствующие скорости. Необходимо также учесть закон сохранения массы:

$$\rho Sv = \rho S_1 v_1 + \rho S_2 v_2.$$

Чтобы определить четыре неизвестные величины (две площади поперечного сечения и две скорости), трех уравнений недостаточно; необходимо найти еще одно уравнение. Согласно закону Бернулли, величина  $\rho v^2/2 + p + \rho gh$  постоянна вдоль потока невязкой жидкости. Внутри жидкости и далеко от начальной точки столкновения давление постоянно и равно атмосферному давлению. Если разностью в высотах потоков, или, более точно, изменением в потенциальной энергии, пренебречь (это справедливо для быстро текущей жидкости), то, в соответствии с уравнением Бернулли, получим равенство

$$v = v_1 = v_2.$$

Это означает, что жидкость покидает желоб с той же самой скоростью на обоих концах! Это удивительно, но правильно (в пределах точности вышеупомянутого приближения).

Теперь уравнения сохранения массы и импульса приобретают вид

$$S = S_1 + S_2, \quad S \sin \alpha = S_1 - S_2,$$

которые приводят к соотношению

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}.$$

Полученное отношение, верное и для отношения масс воды, можно исследовать экспериментально и убедиться в удивительно хорошем согласии с найденными расчетными значениями. Это говорит о том, что сделанные приближения были разумны.

**Р75.** За малое время  $\Delta t$  верхний уровень жидкости с начальным ускорением  $a$  понизится на величину  $\Delta h = a(\Delta t)^2/2$ , а из нижнего отверстия вытечет масса жидкости  $\Delta m = \rho(\pi D^2/4)\Delta h$ .

При этом произойдет уменьшение потенциальной энергии жидкости в целом на  $\Delta mgh$  (рис.158). Тем временем, вся жидкость ускорится до скорости  $v = a\Delta t$ , и ее кинетическая энергия увеличится до  $\rho h(\pi D^2/4)v^2/2$ .

Скорость вытекшей за это время жидкости больше, чем  $v$ , но ее кинетической энергией можно пренебречь, поскольку общее количество вовлеченной в движение воды много больше количества вытекшей.

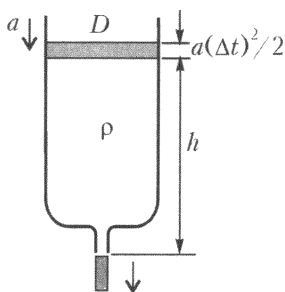


Рис. 158

Согласно закону сохранения энергии, изменения потенциальной и кинетической энергий одинаковы, поэтому запишем

$$\rho gh \frac{\pi D^2}{4} \frac{a}{2} (\Delta t)^2 = \rho h \frac{\pi D^2}{4} \frac{(a\Delta t)^2}{2},$$

откуда следует, что

$$a = g.$$

Это означает, что в первый момент вся вода начинает свободно падать. В соответствии с законом сохранения массы, скорость вытекающей воды в  $(D/d)^2$  раз выше, чем скорость воды в сосуде. Следовательно, ускорение вытекающей воды должно быть больше  $g$  во столько же раз. Например, если  $D/d = 10$ , то начальное ускорение вытекающей жидкости равно  $100g$ !

Как долго жидкость будет находиться в свободном падении? Согласно закону Торричелли, скорость истечения равна  $\sqrt{2gh}$ , а скорость снижения уровня жидкости в сосуде составляет  $g\tau$ , причем временной интервал  $\tau$  между началом истечения и достижения (почти) постоянной скорости воды можно оценить,

используя соотношение

$$g\tau \approx \left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2gh}.$$

Если, например,  $h = 20$  см, а  $d/D = 1/10$ , то  $\tau \approx 0,002$  с, что является незначительным для большинства экспериментов.

**Р76.** Песок течет через отверстие почти равномерно, и поэтому полное время работы песочных часов  $T$  пропорционально объему песка, т.е.  $H^3$ . Время  $T$  может также зависеть от ускорения свободного падения  $g$ , диаметра отверстия  $d$  и плотности песка  $\rho$ .

А теперь воспользуемся хорошо известным в физике методом размерностей. Допустим, что величины  $T$ ,  $H$ ,  $g$ ,  $d$  и  $\rho$  связаны степенной зависимостью:

$$T \sim H^3 g^\alpha d^\beta \rho^\gamma, \text{ или } T = k H^3 g^\alpha d^\beta \rho^\gamma.$$

Здесь  $k$  – безразмерный числовой коэффициент, а  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  – некоторые числа, которые нам надо определить.

Выпишем размерности всех интересующих нас величин в какой-либо одной системе единиц, например в СИ:

$$[T] = \text{с}, [H] = \text{м}, [g] = \text{м} \cdot \text{с}^{-2}, [d] = \text{м}, [\rho] = \text{кг} \cdot \text{м}^{-3}.$$

Левая и правая части записанной нами формулы должны, конечно же, иметь одинаковые размерности. Это означает, что должно выполняться равенство

$$\text{с} = \text{м}^3 \cdot \text{м}^\alpha \cdot \text{с}^{-2\alpha} \cdot \text{м}^\beta \cdot \text{кг}^\gamma \cdot \text{м}^{-3\gamma}.$$

В левой части вообще нет килограммов, поэтому сразу получаем

$$\gamma = 0.$$

Слева секунды присутствуют в первой степени, а справа – в степени  $-2\alpha$ ; следовательно,

$$1 = -2\alpha, \text{ или } \alpha = -\frac{1}{2}.$$

Аналогичное равенство запишем для метров:

$$0 = 3 + \alpha + \beta - 3\gamma,$$

откуда находим

$$\beta = 3\gamma - \alpha - 3 = 0 + \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2}.$$

В итоге получаем

$$T = k H^3 g^{-1/2} d^{-5/2}.$$

Заметим, что коэффициент пропорциональности  $k$  мето-

дом размерностей, естественно, определить нельзя. Но если нас интересуют оценки по порядку величины, то  $k$  можно считать числом порядка единицы.

Пусть, например, высота  $H$  песочных часов составляет несколько сантиметров, а диаметр  $d$  порядка миллиметра. Тогда время  $T$  оказывается равным нескольким минутам. За это время, скажем, может свариться яйцо для завтрака.

*Примечание.* В принципе, средний диаметр песчинки мог быть тоже включен в формулу. Однако он намного меньше, чем другие используемые длины, поэтому не может играть существенную роль в размерном рассуждении.

**Р77.** Пусть  $x$  — смещение шарика массой  $m$  по вертикали,  $F_{\text{пр}}$  — сила натяжения пружины. Вычислим силу  $F$ , действующую на шарик.

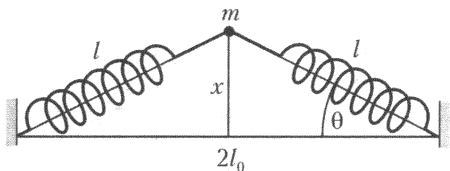


Рис. 159

Длина растянутой пружины равна (рис.159)

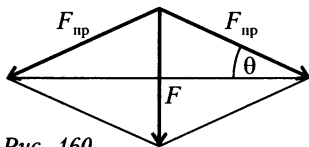
$$l = \sqrt{l_0^2 + x^2} \approx l_0 + \frac{x^2}{2l_0},$$

поэтому сила натяжения в ней равна

$$F_{\text{пр}} = k(l - l_0) = \frac{kx^2}{2l_0},$$

где  $k$  — жесткость пружины. Результирующая сила  $F$ , действующая на шарик, составляет (рис.160)

$$F = -2F_{\text{пр}} \sin \theta \approx -2F_{\text{пр}} \frac{x}{l_0} = -k \frac{x^3}{l_0^2}.$$



Таким образом, уравнение движения выглядит следующим образом: Рис. 160

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{kx^3}{l_0^2}.$$

Это дифференциальное уравнение нельзя решить элементарными методами. Однако попробуем использовать метод размерностей. Перепишем уравнение в виде

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{kx^3}{ml_0^2} = -Cx^3.$$

Мы можем предположить, что период колебаний  $T$  зависит только от константы  $C$  и амплитуды колебаний  $A$ . Тогда можно

записать

$$T \sim C^{\alpha} A^{\beta}.$$

Воспользовавшись методом размерностей (подробнее о нем рассказано в предыдущей задаче), получаем

$$C = c^{-2\alpha} \cdot m^{-2\alpha} \cdot m^{\beta},$$

или

$$1 = -2\alpha, \quad 0 = -2\alpha + \beta.$$

Отсюда  $\alpha = -1/2$  и  $\beta = -1$ , т.е.  $T \sim 1/A$ . Это означает, что при удвоении амплитуды период уменьшается в два раза.

Так как для метода размерностей выбор переменных для подстановки может показаться довольно произвольным, то, в некоторой степени сомневаясь в достоверности достигнутых заключений, дадим еще один метод решения этой задачи.

Скорость шарика  $v$  как функцию его отклонения из положения равновесия  $x$  можно рассчитать из закона сохранения энергии. Запасенная энергия в двух половинах пружины, когда шарик находится в покое в точке его максимального смещения  $x = A$ , должна быть равна сумме кинетической энергии шарика и запасенной энергии пружины для какого-то произвольного смещения  $x$ . Поскольку удлинение  $\Delta l$  каждой пружины определяется формулой  $\Delta l = x^2/(2l_0)$ , то равенство энергий записывается в виде

$$2k \frac{(A^2/(2l_0))^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + 2k \frac{(x^2/(2l_0))^2}{2}.$$

Из этого уравнения можно выразить скорость шарика:

$$\frac{dx}{dt} = v = \frac{1}{l_0} \sqrt{\frac{k}{2m}} \sqrt{A^4 - x^4}.$$

После разделения переменных получаем

$$l_0 \sqrt{\frac{2m}{k}} \int \left( \frac{1}{\sqrt{A^4 - x^4}} \right) dx = \int dt = \frac{T}{4},$$

где пределы интегрирования для координаты  $x$  взяты от 0 до  $A$ , а для времени — от 0 до  $T/4$ . Введем новую переменную  $y = x/A$ , тогда окончательный результат запишется в виде

$$T = \frac{l_0}{A} \sqrt{\frac{32m}{k}} \int \left( \frac{1}{\sqrt{1 - y^4}} \right) dy,$$

где пределы интегрирования для  $y$  взяты от 0 до 1.



Это выражение непосредственно показывает, что период обратно пропорционален амплитуде, так что удвоение амплитуды колебаний снижает период до 1 с.

*Примечание.* Определенный интеграл в последнем выражении можно оценить, используя всего лишь программируемый калькулятор:

$$\int \left( \frac{1}{\sqrt{1-y^4}} \right) dy = 1,31 \quad (\text{в пределах от } 0 \text{ до } 1),$$

что приводит к полному решению задачи.

**Р78.** Из-за слабости пружины груз сначала фактически свободно падает. Вскоре длина пружины становится в несколько раз больше ее нерастянутой длины  $L$ , которой можно будет пренебречь в течение последующего движения. С таким приближением можно считать, что груз совершает гармонические колебания по вертикали и по горизонтали. Поскольку груз отпущен без начальной скорости, он оказывается под точкой подвеса (на оси  $y$ ) через четверть периода горизонтального движения. Тем временем, вертикальное движение также завершило четверть цикла, и груз пришел в свое положение равновесия на высоте  $mg/k$  (это намного больше, чем  $L$ ).

Движение можно описать и количественно. Уравнения движения груза в точке  $(x, y)$  следующие:

$$ma_x = -kx \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - L}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$ma_y = -ky \left( \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - L}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + mg.$$

Вначале, пока удлинение пружины незначительно больше  $L$ , силой растяжения пружины можно пренебречь. С другой стороны, когда  $\sqrt{x^2 + y^2} \gg L$ , можно пренебречь первоначальной длиной пружины. Тогда уравнения движения приобретают простой вид:

$$ma_x = -kx,$$

$$ma_y = -ky + mg.$$

Эти уравнения описывают гармонические колебания относительно начала координат в  $x$ -направлении и относительно положения равновесия в  $y$ -направлении. Объединение начальных условий

дает решение в виде

$$x(t) = L \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t, \\ y(t) = \frac{mg}{k} \left( 1 - L \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \right).$$

Тело находится под точкой подвеса, когда

$$x(t) = 0 \text{ и } y = y_0 = \frac{mg}{k},$$

что соответствует нашим предыдущим результатам.

*Примечание.* Для ранней стадии движения, т.е. при  $t \ll \sqrt{m/k}$  (когда принятые уравнения движения строго обоснованы), выражения для  $x$  и  $y$  можно упростить:  $x(t) \approx L$  и  $y(t) \approx gt^2/2$ . Это согласуется с формулами, описывающими свободное падение, действительно соответствующее начальной стадии движения.

**Р79.** Если вагон тормозит с замедлением  $a$ , то в системе координат вагона на тело будет действовать сила инерции, равная  $ma$  и направленная по движению вагона. Если бы эта сила действовала постоянно, маятник не мог бы, конечно, достичь верхнего вертикального положения. В самом деле, если бы это произошло, то полная работа, произведенная силой инерции, была бы нулевой (суммарное смещение точки приложения силы перпендикулярно ее линии действия), и сила тяготения была бы отрицательной (поскольку потенциальная энергия маятника увеличилась). Это невозможно.

Рассмотрим теперь случай, когда вагон тормозит только в течение некоторого промежутка времени (пока не останавливается). Если он останавливается, когда нить маятника горизонтальна, то работа, произведенная силой инерции, равна  $maR$ , где  $R$  — длина нити. Если маятник впоследствии достигает вертикального положения со скоростью  $v$ , то из закона сохранения энергии имеем

$$maR - 2mgR = \frac{mv^2}{2}.$$

Чтобы нить осталась натянутой даже в самой высокой точке, требуется выполнение условия  $mv^2/R > mg$ , которое вместе с законом сохранения энергии позволяет утверждать, что замедление железнодорожного вагона  $a > 5g/2$ .

Поэтому делаем заключение, что натянутая нить может достичь вертикали при очень большом замедлении  $a$  (чтобы успеть достичь горизонтали прежде, чем вагон остановится).

**Р80.** Силы, действующие на клин, это его сила тяжести и сила нормальной реакции горки. В результате клин будет скользить по горке с ускорением  $g \sin \alpha$ . Уравнения движения Ньютона остаются справедливыми в ускоренной системе отсчета, связанной с клином, если к реальным силам тяжести и нормальной реакции добавить еще силу инерции, направленную вверх по горке.

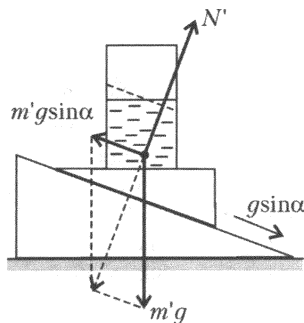


Рис. 161

Рассмотрим небольшой объем воды массой  $m'$  (рис.161). В системе отсчета, связанной с клином, на него действуют три силы: сила тяжести  $m'g$ , сила нормальной реакции  $N'$  и сила инерции, равная  $m'g \sin \alpha$ . При этом результирующая сил гравитации и инерции должна быть перпендикулярна наклонной плоскости горки, поскольку компоненты, параллельные ей, компенсируют друг друга. Тела на клине (стакан и вода в нем) «чувствуют» себя так, как будто они находятся в поле тяготения, перпендикулярном наклонной плоскости. Это означает, что поверхность воды в стакане параллельна наклонной плоскости горки.

Это утверждение не зависит от движения горки; она может быть неподвижной, двигаться поступательно или даже колебаться. Пока трение между наклонной плоскостью горки и клином незначительно и клин не слетает с горки, поверхность воды всегда параллельна наклонной поверхности горки.

Случай  $m \gg M$  заслуживает дополнительных замечаний. При очень большой массе клин отталкивает наклонную плоскость и падает почти свободно. Вес тел на клине (включая воду) почти полностью потерян, но даже в этом случае маленькой силы, держащей воду внутри стакана, все еще достаточно, чтобы поверхность воды осталась параллельной наклонной плоскости.

*Примечание.* Поверхность воды становится параллельной наклонной плоскости спустя большой интервал времени и, соответственно, на очень длинной плоскости. Вот почему это интересное явление не может наблюдаться экспериментально при нормальных обстоятельствах.

**Р81.** Предположим, что веревка однородна по сечению и распределению массы, а на концах свободна, и что она движется по круговой орбите вокруг Земли таким образом, что ее положение относительно Земли всегда одно и то же. Очевидно, если веревка находится в вертикальном положении, то это могло бы происходить только на экваторе.

В земной системе отсчета тело массой  $m$  движется по орбите над экватором на расстоянии  $r$  с угловой скоростью  $\omega$ , испытывая силу притяжения, равную  $-GMm/r^2$ , и центробежную силу инерции, равную  $m r \omega^2$ . Здесь  $M$  – масса Земли,  $G$  – гравитационная постоянная. Условие равновесия веревки состоит в том, что суммарная сила гравитации, которая изменяется с  $r$ , равна центробежной силе инерции, которая также изменяется с  $r$ . Это условие можно легко получить, используя интегральное исчисление, но можно обойтись и без сложной математики.

Представим себе, что веревку немного оттянули вниз некоторой внешней силой. Так как (во вращающейся системе отсчета) веревка была первоначально в равновесии, она может быть смещена из положения равновесия произвольно малой силой, поэтому суммарную работу этой внешней силы можно считать равной нулю. Смещение всей веревки, с точки зрения произведенной работы, эквивалентно медленному перемещению маленькой части веревки массой  $\Delta m$  от верхнего конца веревки к нижнему. Произведенная работа – это сумма работы силы тяжести, равной изменению потенциальной энергии гравитационного поля, и работы средней центробежной силы инерции (она изменяется линейно от  $r$ ). Если нижний конец веревки длиной  $L$  практически касается поверхности Земли, рассматриваемая работа будет равна

$$A = GM\Delta m \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{L+R} \right) - \Delta m \frac{(R + (R+L))\omega^2 L}{2} = 0,$$

где  $R$  – радиус Земли. Это квадратное относительно  $L$  уравнение дает, с использованием известных данных,

$$L = \frac{R}{2} \left( -3 + \sqrt{1 + \frac{8GM}{R^3 \omega^3}} \right) \approx 140000 \text{ км}.$$

Эта длина в несколько раз больше расстояния  $r_{\text{сп}} = (GM/\omega^2)^{1/3} \approx 42000 \text{ км}$ , на котором находятся от центра Земли стационарные телекоммуникационные спутники!

Каково максимальное напряжение в нашей веревке? Можно показать, что самое большое напряжение будет в положении

$r = r_{\text{сп}}$ . При этом отношение предела прочности  $\sigma_{\text{пр}}$  к плотности  $\rho$  веревки будет равно

$$\frac{\sigma_{\text{пр}}}{\rho} = 4,8 \cdot 10^7 \text{ Н} \cdot \text{м/кг}.$$

Полученная величина намного больше таких отношений для известных материалов. Например, отношение  $\sigma_{\text{пр}}/\rho$  для стали равно  $2,6 \cdot 10^5$ , а для углерода –  $1,7 \cdot 10^6$ . Поэтому, хотя в принципе «крюк к небу» и совместим с законами Ньютона, но в настоящее время «сделать» это невозможно (по крайней мере, с веревкой постоянного поперечного сечения), так как нет подходящих материалов для этого.

**Р82.** а) В самой высокой точке моста уравнение движения автомобиля записывается в виде

$$mg - N = \frac{mv^2}{r},$$

где  $N$  – сила нормальной реакции моста, численно равная силе давления на мост,  $v = 20 \text{ м/с}$  – скорость автомобиля и  $r$  – радиус кривизны моста. Наиболее трудная часть задачи – определить радиус кривизны.

Если бы мы могли найти движение по такой траектории, для которой хорошо известно нормальное ускорение, то радиус кривизны можно было бы легко рассчитать. Предлагаемый аналог для параболической траектории – это свободный полет снаряда. Пусть снаряд имеет начальную скорость  $v_0$ , направленную под углом  $\alpha$  с горизонту. Дальность ( $d = 100 \text{ м}$ ) и высота ( $h = 5 \text{ м}$ ) снаряда могут быть выражены, используя начальные данные:

$$d = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}, \quad h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Отсюда находим  $\tan \alpha$ :

$$\tan \alpha = \frac{4h}{d} \quad (\alpha \approx 11,3^\circ)$$

и горизонтальную составляющую начальной скорости:

$$v_x = v_0 \cos \alpha = \frac{d\sqrt{2g/h}}{4} = 50 \text{ м/с}.$$

Теперь находим радиус кривизны моста в самой высокой его точке:

$$r = \frac{v_x^2}{g}$$

и силу нормальной реакции:

$$N = m \left( g - \frac{v^2}{r} \right) = mg \left( 1 - \frac{v^2}{v_x^2} \right) = 8,40 \text{ кН}.$$

б) Силу реакции, возникающую при движении автомобиля в любом другом месте моста, можно рассчитать таким же образом, т.е. используя радиус кривизны. В точке, соответствующей трем четвертям длины моста, радиус кривизны равен  $r \approx 254$  м, а сила нормальной реакции равна  $N \approx 8,37$  кН. В этой точке моста есть также касательная сила реакции (сила трения), приблизительно равная 995 Н, так что результирующая сила реакции составляет приблизительно 8,43 кН.

**Р83.** Можно доказать, что радиусы кривизны эллипса в конечных точках его осей равны  $b^2/a$  и  $a^2/b$ , где  $2a$  и  $2b$  – длины большей и малой осей соответственно. Этот геометрический результат можно получить, пользуясь методами аналитической геометрии или рассматривая одну из многих возможных физических ситуаций.

Рассмотрим планету, движущуюся по эллиптической орбите вокруг Солнца. Второй закон Ньютона, примененный в конечной точке большой оси эллипса, находящейся на расстоянии  $r$  от Солнца, дает

$$\frac{GM}{r^2} = \frac{v^2}{R},$$

где  $R$  – радиус кривизны в конечной точке,  $M$  – масса Солнца. Согласно третьему закону Кеплера, период  $T$  движения по орбите равен  $2\pi\sqrt{a^3/(GM)}$ . В соответствии со вторым законом Кеплера, радиус-вектор планеты в равные промежутки времени заметает равные площади. Площадь эллипса равна  $\pi ab$ . Отсюда для случая, когда планета находится в конечной точке большой оси, получаем

$$\frac{vr}{2} = \frac{ab}{2} \sqrt{\frac{GM}{a^3}}.$$

Сравнивая два приведенных уравнения, находим, что  $R = b^2/a$ .

Мы использовали тот факт, что фокусы эллипса находятся на большой оси. Для точек малой оси это доказательство применить нельзя. Однако что касается радиусов кривизны в соответствующих точках, то эти две оси симметричны.

Равномерное движение материальной точки в задаче удовлетворяет уравнению  $F = mv^2/R$ , где  $R$  – соответствующий радиус

кривизны. Используя приведенные данные, получим  $b^2/a = 1,25$  м и  $a^2/b = 10$  м, следовательно,  $2a = 10$  м и  $2b = 5$  м.

*Примечание.* Радиусы кривизны эллипса можно также найти, используя известные формулы гармонического движения. Рассчитаем движение точки, перемещающейся в плоскости  $xy$  по эллипсу с полуосями  $a$  и  $b$ , согласно уравнениям

$$x = a \cos \omega t, \quad y = b \sin \omega t.$$

При  $t = 0$  точка находится на конце главной оси эллипса и движется со скоростью  $v = b\omega$  и ускорением  $A = a\omega^2$ . С другой стороны, ускорение равно  $A = v^2/R$ . Таким образом, радиус кривизны составляет  $R = b^2/a$ . Точно так же мы находим радиус кривизны на конце малой оси, который равен  $a^2/b$ .

**Р84.** Обозначим ширину канала  $d$  и нарисуем прямую, перпендикулярную его берегам и находящуюся на расстоянии  $d$  вниз по течению от отправной точки  $A$  лодки (рис.162). Лодка первоначально находится на расстоянии  $d$  как от отметки  $B$  на противоположном берегу, так и от этой прямой линии. Поскольку скорость воды и скорость лодки относительно воды равны  $v$ , то вода относит лодку вниз по течению на то же расстояние, что проходит лодка в направлении к точке  $B$ . Это означает, что лодка всегда одинаково удалена от точки  $B$  и от прямой линии. Поэтому лодка движется по параболе, у которой  $B$  – фокус, а наша прямая линия – директриса. Через некоторое время лодка причаливает к противоположному берегу в точке, расположенной на расстоянии  $d/2$  от точки  $B$ . Поскольку скорость течения равна скорости лодки, лодочник не может подойти к берегу ближе этой точки.

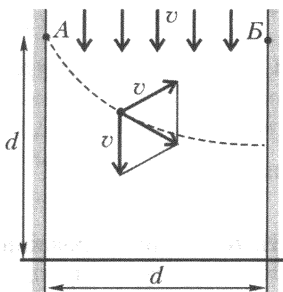


Рис. 162

**Р85.** Если бы после небольшого толчка ребенок скользил прямо вниз с постоянной скоростью, то составляющая силы тяжести  $F$  вдоль наклонной плоскости, назовем ее силой  $F_{\text{ск}}$ , должна была бы равняться силе трения  $F_{\text{тр}}$ , т.е.  $F_{\text{ск}} = F_{\text{тр}}$ . Сила трения, направление которой всегда противоположно направлению мгновенной скорости, приводит к снижению скорости, в то время как составляющая силы тяжести увеличивает компоненту скорости  $v_y$ , параллельную наклонной плоскости. В этой задаче

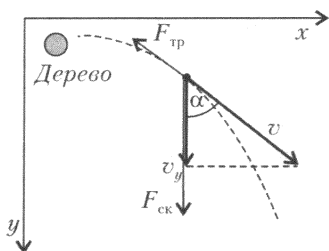


Рис. 163

присутствуют оба эти воздействия, что приводит к довольно сложному движению – на изогнутом пути и с изменяющимся ускорением. Несмотря на это, конечную скорость можно определить и без детального описания движения.

На рисунке 163 показана система координат, в которой траектория ребенка – это некая кривая. Обозначим величину мгновенной

скорости скользящего ребенка  $v$  и ее составляющую вдоль вертикальной оси  $v_y$ . Сначала вычислим изменение этих величин за короткий промежуток времени  $\Delta t$ . Согласно второму закону Ньютона,

$$m\Delta v = (-F_{\text{тр}} + F_{\text{ск}} \cos \alpha) \Delta t,$$

$$m\Delta v_y = (F_{\text{ск}} - F_{\text{тр}} \cos \alpha) \Delta t.$$

Сложение этих двух уравнений и использование условия  $F_{\text{ск}} = F_{\text{тр}}$  дает

$$\Delta v + \Delta v_y = \Delta(v + v_y) = 0,$$

или

$$v + v_y = \text{const}.$$

Из начальных условий значение этой константы равно  $v_0 = 1$  м/с. Конечная скорость  $v_k$  скользящего ребенка направлена вниз по склону (поперечная составляющая скорости  $v$  исчезнет), поэтому с учетом того, что  $v = v_y = v_k$ , ее величина определяется из предыдущего уравнения:

$$v_k = \frac{v_0}{2} = 0,5 \text{ м/с}.$$

**Р86.** Пусть  $v$  – скорость судна контрабандистов,  $kv$  – скорость катера офицера береговой службы,  $k$  – требуемое отношение скоростей этих двух судов. Пусть через время  $t$  расстояние между судами равно  $d$ , а расстояние катера от берега равно  $y$ . Запишем изменения расстояний  $\Delta d$  и  $\Delta y$  за малый интервал времени  $\Delta t$  (рис.164):

$$\Delta d = kv\Delta t - v \sin \alpha \cdot \Delta t,$$

$$\Delta y = kv \sin \alpha \cdot \Delta t,$$

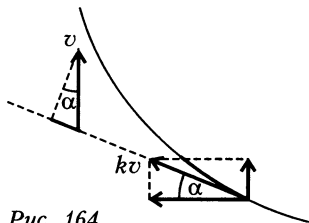


Рис. 164



где  $\alpha$  – угол между мгновенной скоростью катера и берегом. Просуммируем эти малые смещения и учтем, что

$$\sum \Delta d = \sum \Delta y = \sum v \Delta t = L.$$

Исключив угол  $\alpha$ , получаем для  $k$  удивительно простое квадратное уравнение:

$$k^2 - k - 1 = 0,$$

откуда находим его положительный корень:

$$k = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618.$$

Это число – известное «золотое сечение», связанное с рядом Фибоначчи. В нашем случае это – отношение скоростей катера береговой службы и судна контрабандистов, если они должны встретиться, как описано в задаче.

**Р87.** Из симметрии схемы и начальных условий следует, что все тела падают к центру  $n$ -угольника с одинаковыми непостоянными ускорениями. Система сохраняет свою первоначальную форму, но расстояние  $r$  от центра уменьшается с неравномерно увеличивающейся скоростью. Суммарная сила  $F$ , действующая на одно  $n$ -е тело со стороны всех остальных  $(n - 1)$  тел, когда оно находится на расстоянии  $r$  от центра, равна

$$F = G \left( \frac{m}{r} \right)^2 \sum \frac{1}{4 \sin \pi k/n},$$

где суммирование ведется по  $k$  от 1 до  $(n - 1)$ . Эта сила идентична гравитационному притяжению неподвижного тела, расположенного в центре и обладающего массой  $M_n$ , определяемой по формуле

$$M_n = \frac{m}{4} \sum \frac{1}{\sin \pi k/n}.$$

Значение массы  $M_n$  (в единицах  $m$ ) можно рассчитать для любого заданного значения  $n$ , например:

$$M_2 = 0,25; \quad M_3 = 0,58; \quad M_4 = 0,96; \quad \dots; \quad M_{10} = 3,86; \quad \dots$$

Время  $T$  «схлопывания» системы (коллапса) от начального состояния  $R$  на центральную массу эквивалентно половине периода  $T_3$  движения спутника по выродившейся эллиптической орбите с главной полуосью  $R/2$ . Период  $T_{\text{сп}}$  движения спутника по круговой орбите радиусом  $R$  можно рассчитать непосредствен-

но из уравнения для кругового движения:

$$\frac{GmM_n}{R^2} = mR \left( \frac{2\pi}{T_{\text{сп}}} \right)^2, \text{ откуда } T_{\text{сп}} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM_n}}.$$

Согласно третьему закону Кеплера,

$$\left( \frac{T_3}{T_{\text{сп}}} \right)^2 = \left( \frac{R/2}{R} \right)^3.$$

Таким образом, для времени коллапса получаем

$$T = \frac{T_3}{2} = \pi \sqrt{\frac{R^3}{8GM_n}}.$$

*Примечание.* Представляется интересным случай  $n \gg 1$ . Поскольку число тел увеличивается,  $M_n$  тоже увеличивается даже если полная масса  $M_0$  системы ограничена ( $m = M_0/n$ ). Чем более «точечно» данное количество вещества расставлено по кругу, тем короче время, которое требуется для разрушения этой системы собственным гравитационным притяжением. Однако не имеет никакого смысла исследовать непрерывное распределение вещества в произвольно тонком кольце, поскольку размером, занимаемым веществом в поперечном, т.е. в радиальном направлении, нельзя пренебрегать.

**Р88.** Согласно первому закону Кеплера, орбита ракеты – эллипс с одним из фокусов в центре планеты. Скорости запуска и возвращения ракеты параллельны друг другу (хотя и направлены противоположно друг другу), поэтому точки запуска и возвращения находятся на концах малой оси эллипса (рис. 165).

Но для эллипса расстояние от фокуса до любого конца малой оси равно длине  $a$  его большой полуоси, следовательно,  $a = R$ .

Из третьего закона Кеплера следует, что спутники на орбитах, имеющих различные эксцентриситеты, но те же самые длины главных осей, имеют равные периоды. Это означает, что в нашем случае период для полной орбиты был бы равен  $T$ . Ракета, однако, проходит только половину эллипса. Время, требуемое для этого, не составляет половину полного периода, но пропорционально области, заметаемой радиусом-вектором, соеди-

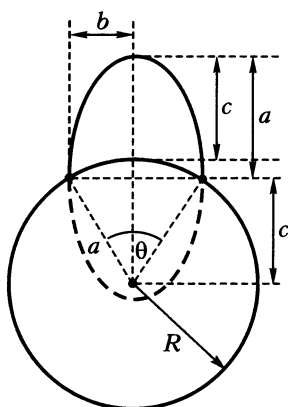


Рис. 165

няющим ракету с фокусом (второй закон Кеплера). Площадь целого эллипса равна

$$S = \pi ab = \pi a^2 \sin \frac{\theta}{2}.$$

Заметаемая площадь для половины орбиты составляет

$$S_1 = \frac{\pi ab}{2} + \frac{2bc}{2} = \frac{1}{2} \pi a^2 \sin \frac{\theta}{2} + a^2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}.$$

Таким образом, время  $T_1$  полета ракеты равно

$$T_1 = T \frac{S_1}{S} = T \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cos \frac{\theta}{2} \right).$$

Максимальное расстояние над поверхностью планеты составляет

$$c = R \cos \frac{\theta}{2} \leq R.$$

Если угол между точками запуска и прибытия приближается к нулю ( $\theta \rightarrow 0$ ), то расчетное время  $T_1$  полета приближается к максимальному значению:

$$T_1 \rightarrow T \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \right),$$

а максимальная высота достигает радиуса планеты:  $c \rightarrow R$ . Но если место взлета и возвращения то же самое ( $\theta = 0$ ), то ракета может достичь любой произвольной высоты, большой или маленькой. Здесь имеется в виду то, что период и максимальная высота не являются непрерывными функциями в точке  $\theta = 0$ .

Если скорость запуска достаточно большая (равна или больше первой космической скорости  $v_1 = \sqrt{Rg}$ ) и направлена по касательной к поверхности планеты, то возможна орбита, показанная на рисунке 166. Скорость возвращения опять параллельна скорости запуска, но на сей раз они направлены одинаково. Максимальная высота может быть любой, но период должен быть по крайней мере равен  $T$ . Эти орбиты соответствуют частному случаю  $\theta = 0$ .

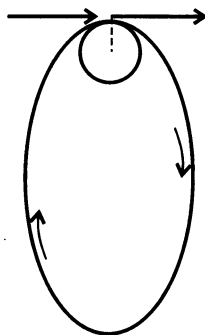


Рис. 166

**Р89.** Схематически ситуация поясняется рисунком 167.

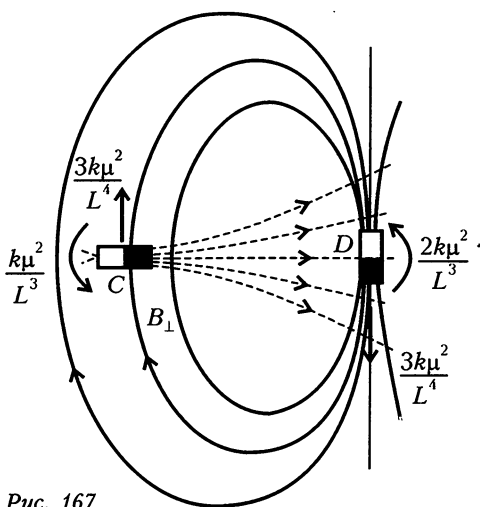


Рис. 167

ненулевая, поскольку перпендикулярная составляющая  $B_{\perp}$  магнитного поля, созданного магнитиком  $D$ , немного меньше в местах нахождения одного из полюсов магнитика  $C$ , чем другого. Величина результирующей силы равна  $\mu(dB_{\perp}/dr) = 3k\mu^2/L^4$  (производная определяется при  $r = L$ ), а ее направление совпадает с направлением  $B_{\perp}$ .

Эта сила и аналогичная сила, действующая на магнитик  $D$ , образуют пару сил, которая создает вращающий момент по направлению часовой стрелки, равный  $3k\mu^2 \cdot L^3$ . Он точно компенсирует действие еще двух сил, действующих на брусок, о которых говорилось в пункте а). Поэтому, когда систему подвешивают, вообще ничего не случится — факт, который очевиден из соображений симметрии и невозможности создания вечного двигателя.

**Примечание.** Это необычный пример асимметричных сил, которые действуют по параллельным, но не идентичным прямым.

**Р90.** Легко показать, что заряд  $q$ , расположенный вблизи проводящей плоскости, приводит к такому перераспределению заряда на этой плоскости, что электростатическое поле вблизи плоскости со стороны заряда  $q$  идентично полю, которое создают этот заряд и фиктивный заряд  $-q$ , расположенный симметрично относительно плоскости. Это лежит в основе принципа зеркальных изображений. Таким образом, сила притяжения  $F$ , действу-

а) Пусть  $k = \mu_0/(4\pi)$ . Тогда момент сил, действующих на магнитик  $C$  со стороны магнитика  $D$ , равен  $k\mu^2/L^3$ , а момент сил, действующих на магнитик  $D$  со стороны магнитика  $C$ , равен  $2k\mu^2/L^3$ , причем оба момента действуют против часовой стрелки.

б) Момент сил — не единственный результат действия магнитных полей. Сила, действующая на  $C$ ,

ющая на тело со стороны плоскости, рассчитывается по закону Кулона:

$$F(x) = k \frac{q^2}{4x^2},$$

где  $k$  – константа и  $x$  – расстояние между плоскостью и телом в любой момент времени. Первоначально тело находится на расстоянии  $2d$  от заряда-изображения. Эта сила аналогична силе тяготения, возникающей между двумя телами массами  $M = kq^2/(4Gm)$  и  $m$ , расположенных на расстоянии  $x$  друг от друга, т.е.  $F = GMm/x^2$ . На основе этой аналогии третий закон Кеплера дает соотношение между периодом обращения  $T$  планеты и большой полуосью  $a$  ее эллиптической орбиты:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}.$$

Если заряженное тело опущено на расстоянии  $d$  от металлической плоскости, то его орбиту можно рассматривать как выродившийся эллипс с главной полуосью  $a = d/2$ . Время  $T_h$ , через которое заряд попадает на плоскость, равно половине периода вращения по выродившейся орбите:

$$T_h = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{q} \sqrt{\frac{md^3}{2k}}.$$

**Р91.** Морская вода – хороший проводник, потому что в ней могут свободно перемещаться положительные и отрицательные ионы. Если близко к поверхности воды поднести заряженный пластмассовый шар, то на поверхности воды собираются заряды противоположного знака, в то время как одноименные заряды удаляются от нее. Так будет продолжаться до тех пор пока результирующее электрическое поле в проводнике не исчезнет.

Заряженный шар притягивает воду под собой и вспучивает поверхность. Электрические силы, возникающие в максимуме, скомпенсированы, главным образом, силами тяжести (эффект поверхностного натяжения не учитывается). Мы не знаем точно форму максимума, но ясно, что повышение уровня воды будет очень небольшим, поэтому достаточно найти подъем в точке  $P$ , изображенной на рисунке 168.

Используем так называемый метод зеркальных изображений. В точ-

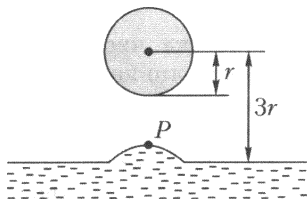


Рис. 168

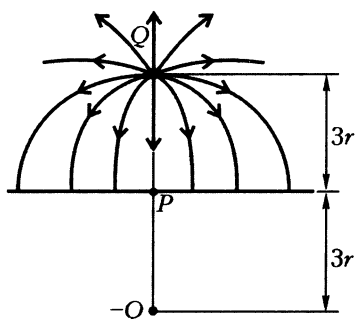


Рис. 169

ке  $P$  электрическое поле  $E_1$ , создаваемое зарядом  $Q$ , равно

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(3r)^2}.$$

Электрическое поле, которое создается индуцированным поверхностным зарядом, эквивалентно полю зеркально отраженного заряда  $-Q$ , расположенного на расстоянии  $3r$  (рис.

169). Электрическое поле в точке  $P$  от заряда-изображения имеет ту же величину и направление, что и поле заряда  $Q$ , так что результирующее электрическое поле  $E$  будет равно

$$E = 2E_1 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(3r)^2}.$$

Согласно теореме Гаусса, поверхностная плотность заряда в точке  $P$  определяется формулой

$$\sigma = \epsilon_0 E = \frac{1}{2\pi} \frac{Q}{(3r)^2}.$$

Сила  $F$ , действующая на единицу площади водной поверхности, равна произведению поверхностной плотности заряда  $\sigma$  на напряженность электрического поля шара  $E_1$ . Эта сила поднимает воду в точке  $P$  до тех пор, пока не будет скомпенсирована силой гидростатического давления, связанного с повышением воды в максимуме:

$$\sigma E_1 = \rho g h.$$

Отсюда найдем высоту  $h$  подъема воды под зарядом:

$$h = \frac{1}{\rho g} \frac{1}{2\pi} \frac{Q}{(3r)^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(3r)^2}.$$

Подстановка числовых данных в это уравнение дает  $h \approx 0,29$  мм, что является очень малой величиной по сравнению с диаметром шара и оправдывает наше предположение о небольшом отклонении водной поверхности от плоской.

**Р92.** Метод электрических изображений можно применить и к сферическим поверхностям. Пусть есть два точечных заряда  $Q_1$  и  $-Q_2$ . В созданном ими электрическом поле положение точек

нулевого потенциала задается уравнением

$$k \frac{Q_1}{r_1} - k \frac{Q_2}{r_2} = 0 ,$$

где  $r_1$  и  $r_2$  – расстояния от двух зарядов до общей точки на обсуждаемой поверхности. Прямая перестановка дает

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{r_1}{r_2} ,$$

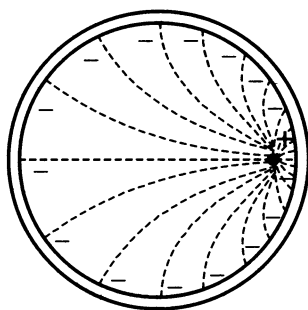


Рис. 170

т.е. отношение расстояний  $r_1/r_2$  постоянно. Как известно, точки с таким свойством лежат на сфере. Поэтому поверхность с нулевым потенциалом – это сфера.

Если данная в задаче металлическая сфера заземлена, то потенциал ее равен нулю. Точечный заряд  $+Q$  внутри нее индуцирует неоднородное распределение заряда на внутренней поверхности металлической сферы, как показано на рисунке 170. Электрическое поле внутри металлической сферы, создаваемое фактическим зарядом и распределенным индуцированным зарядом, является таким же, как если бы оно было создано фактическим зарядом и отрицательным точечным зарядом вне сферической оболочки. Он и есть заряд-изображение для металлической сферической поверхности.

Распределение заряда внутри сферической металлической оболочки не зависит от потенциала оболочки. Если бы оболочка не была заземлена, то заряд  $+Q$ , оказался бы равномерно распределенным по ее внешней поверхности, независимо от внутреннего распределения заряда. Это объясняется тем, что электрическое поле внутри металла равно нулю, поэтому заряд на внешней поверхности оболочки не «знает» о присутствии заряда на ее внутренней поверхности. Внешнее электрическое поле заставляет его проявиться, как если бы замкнутый заряд находился в центре сферы.

Сила, действующая на заряд внутри оболочки, равна кулоновской силе, действующей между зарядом и зарядом-образом. Используем систему обозначений, показанную на рисунке 171: заряд  $+Q$  находится на расстоянии  $d$  от центра сферы радиусом  $R$ , в то время как заряд-изобра-

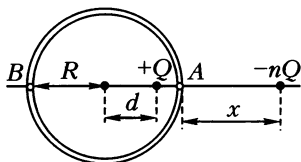


Рис. 171

жение  $-nQ$  находится на расстоянии  $x$  от оболочки снаружи. Величину  $n$  можно найти, рассмотрев точки  $A$  и  $B$  пересечения сферической оболочки с прямой, соединяющей настоящий и фиктивный заряды:

$$n = \frac{x}{R-d} = \frac{x+2R}{R+d}.$$

Отсюда получаем

$$n = \frac{R}{d} \text{ и } x = \frac{R(R-d)}{d}.$$

Сила  $F$ , действующая на заряд внутри сферической металлической оболочки, таким образом, равна

$$F = -\frac{knQ^2}{(x+R-d)^2} = -\frac{kQ^2Rd}{(R^2-d^2)^2}.$$

Ясно, что эта сила равна нулю, когда  $d = 0$ , и стремится к бесконечности при  $d \rightarrow R$ . Отрицательный знак в выражении для силы показывает, что она направлена в сторону фиктивного заряда.

**Примечание.** Распределение электрического заряда на внутренней поверхности сферической металлической оболочки можно рассчитать, используя теорему Гаусса. Величина поверхностной плотности заряда пропорциональна напряженности поля, полученного наложением полей реальных зарядов и зарядов-образов.

**Р93.** Пусть  $M$  – масса атома бора (фактически иона бора),  $m$  – масса неизвестной сталкивающейся с ним частицы.

Перед столкновением частицы имеют одинаковые встречные скорости  $v_0$ , измеренные в лабораторной системе отсчета (ЛАБ).

Эта ситуация схематически показана на рисунке 172. Суммарный импульс этих частиц равен  $Mv_0 - mv_0$ , откуда можно найти скорость  $u$  их центра масс (ЦМ):

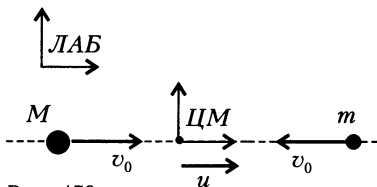


Рис. 172

$$u = v_0 \frac{M-m}{M+m}.$$

В системе ЦМ полный импульс всегда равен нулю, и эти две частицы должны всегда двигаться в противоположных направлениях с равными импульсами. В соответствии с законом сохранения энергии, величина импульса, а значит и скорости, каждой частицы, должна быть одной и той же до и после столкновения, только направления импульса и скорости могут изменяться.



Скорость  $V$  атомов бора в системе  $\text{ЦМ}$  перед столкновением равна

$$V = v_0 - u = v_0 - v_0 \frac{M - m}{M + m} = \frac{2mv_0}{M + m}.$$

После столкновения скорость атомов бора будет иметь такое же значение (рис.173).

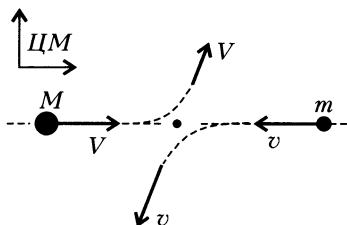


Рис. 173

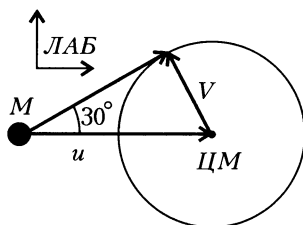


Рис. 174

Теперь вернемся в лабораторную систему координат и прибавим вектор скорости системы  $\text{ЦМ}$  к относительным скоростям частиц в этой системе. Таким образом, абсолютная скорость атома бора после рассеивания равна  $\vec{u} + \vec{V}$ , причем конец этого вектора должен находиться на окружности радиусом  $V$  (рис.174). Максимальный угол между конечной и начальной скоростями атома бора соответствует случаю, когда вектор  $\vec{u} + \vec{V}$  направлен по касательной к этой окружности, т.е. перпендикулярен вектору  $\vec{V}$ . В этом случае

$$V = u \sin 30^\circ,$$

и

$$\frac{2mv_0}{M + m} = \frac{M - m}{M + m} \frac{v_0}{2}.$$

Отсюда получаем массу налетающей частицы:  $m = M/5$ .

Таким образом, неизвестная частица имеет массовое число  $A = 2$ . Это может быть дейтрон, или ядро дейтерия.

**Р94.** Трение между двумя шарами незначительно, поэтому в процессе столкновения необходимо учитывать только нормальные (лобовые) силы реакции. Таким образом, в первый момент после столкновения первый шар останавливается, продолжая вращаться с угловой скоростью  $\omega = v_0/r$ , а второй шар приобретает скорость первого  $v_0$  и движется без вращения (здесь  $r$  – радиус шаров).

Однако трение между шарами и столом приводит к следующему. Первый шар после соударения начинает ускоряться силой

трения  $F_{\text{тр}} = \mu mg$  вперед, замедляя свое вращение, а второй шар за счет такой же силы замедляет свое поступательное движение, увеличивая угловую скорость (рис. 175). В обоих случаях происходит потеря энергии. Эти процессы продолжаются до тех пор, пока не станет выполняться условие отсутствия проскальзывания  $\omega = v/r$  для

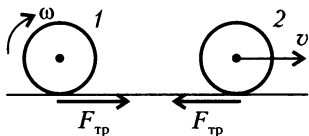


Рис. 175

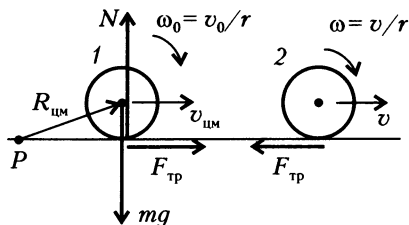


Рис. 176

каждого шара. После этого шары равномерно катятся без проскальзывания, и потеря энергии не происходит.

Каким же образом трение влияет на движение шаров после соударения? Рассмотрим подробнее процессы установления равномерного движения шаров. Отметим, что при решении задачи будем использовать закон сохранения (изменения) момента импульса для каждого шара относительно точки касания стола  $P$ , в которой первый шар остановится после соударения (рис. 176). В этом случае нет внешних сил, которые могли бы изменить момент импульса наших шаров (сила трения проходит через точку  $P$ ).

Напомним выражение для момента импульса (при плоскопараллельном движении) относительно точки  $P$ , не совпадающей с центром масс:

$$\vec{L} = [\vec{R}_{\text{цм}} \times m\vec{v}_{\text{цм}}] + I_0\vec{\omega},$$

где  $I_0$  — момент инерции относительно центра масс. В общем случае

$$L = rmv_{\text{цм}} + I_0\omega.$$

В нашем случае, при отсутствии проскальзывания,

$$[\vec{R}_{\text{цм}} \times m\vec{v}_{\text{цм}}] = mr \cdot \omega r = mr^2\omega,$$

и

$$L = (I_0 + mr^2)\omega.$$

Учитывая сказанное, можем написать уравнения

$$I_0\omega_0 = I\omega_1, \quad mv_0r = I\omega_2,$$

где  $I_0 = (2/5)mr^2$  – момент инерции шара относительно центра инерции,  $I = (7/5)mr^2$  – момент инерции шара относительно точки касания стола,  $\omega_1$  и  $\omega_2$  – установившиеся угловые скорости первого и второго шаров соответственно. Так как при установившемся качении угловая скорость равна частному от деления скорости движения центра масс на радиус шара, имеем дополнительные уравнения

$$\omega_1 = \frac{v_1}{r}, \quad \omega_2 = \frac{v_2}{r},$$

где  $v_1$  и  $v_2$  – скорости движения центров масс первого и второго шаров соответственно. Таким образом, исходные уравнения приводятся к виду

$$\frac{2}{5}mr^2\omega_0 = \frac{7}{5}mr^2\frac{v_1}{r},$$

$$mv_0r = \frac{7}{5}mr^2\frac{v_2}{r},$$

откуда легко получаем скорости центров масс первого шара:  $v_1 = (2/7)v_0$  и второго шара:  $v_2 = (5/7)v_0$ . Видно, что первый шар не сможет догнать второй.

Заметим, при решении задачи нам не понадобилось обращаться к конкретному виду силы трения, поэтому результат будет всегда одним и тем же для любого трения. В то же время, при отсутствии трения первый шар после соударения остался бы на месте, вращаясь с угловой скоростью  $\omega_0$ , а второй двигался бы поступательно со скоростью  $v_0$ , и эти параметры движения не изменялись бы со временем.

*Примечание.* Интересно, что после столкновения двух тонких колец эти кольца через некоторое время будут катиться с одинаковыми скоростями, так как для колец  $I_0 = mr^2$ .

**Р95.** При прохождении расстояния  $L$  доска приобретает скорость  $v_m$  и сообщает роликам угловую скорость  $\omega_m = v_m/r$ . При этом потенциальная энергия доски уменьшается на  $MgL \sin \alpha$ , а кинетическая энергия каждого ролика становится равной

$$\frac{I\omega_m^2}{2} = \frac{mv_m^2}{4}.$$

Заметим, что конечная линейная скорость каждого ролика равна установившейся скорости доски, а момент инерции каждого ролика равен  $I = mr^2/2$ .

Неправильно полагать, что потерянная потенциальная энергия доски просто преобразуется в кинетическую энергию роли-

ков. Дело в том, что при любом ускорении за счет трения возникает проскальзывание, а значит, есть потери на трение.

Пусть  $F(t)$  – сила трения между отдельным роликом и доской. (Необязательно предполагать, что эта сила постоянна во времени.) Изменение момента импульса ролика  $I\Delta\omega$  в течение малого интервала времени  $\Delta t$  равно

$$I\Delta\omega = rF(t)\Delta t.$$

Эти изменения можно просуммировать по времени взаимодействия ролика и доски и получить уравнение, содержащее конечную угловую скорость ролика  $\omega_m$ :

$$r\sum F(t)\Delta t = I\omega_m = \frac{Iv_m}{r}.$$

С другой стороны, в течение интервала  $\Delta t$  силы трения совершают работу, равную произведению силы трения на относительное смещение соприкасающихся поверхностей. Эта работа выделится в виде тепла:

$$\Delta Q = F(t)(v_m - r\omega(t))\Delta t.$$

Общее количество рассеянной механической энергии будет равно

$$\begin{aligned} Q &= \sum F(t)(v_m - r\omega(t))\Delta t = r\omega_m \sum F(t)\Delta t - I \sum \omega\Delta\omega = \\ &= I\omega_m^2 - \frac{I\omega_m^2}{2} = \frac{I\omega_m^2}{2}. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали тот факт, что

$$\omega\Delta\omega = \frac{1}{2}\Delta(\omega^2).$$

Полученный результат показывает, что выделившееся количество теплоты равно величине кинетической энергии, приобретенной роликами. Замечательно, что результат не зависит ни от величины силы трения, ни от ее зависимости от времени.

Запишем теперь уравнение энергетического баланса для установившегося движения доски:

$$MgL \sin \alpha = \frac{L}{d} \frac{mv_m^2}{4} + Q = 2 \frac{L}{d} \frac{mv_m^2}{4}.$$

Отсюда находим конечную скорость доски:

$$v_m = \sqrt{\frac{2Mgd \sin \alpha}{m}}.$$

**Р96.** Пусть  $P$  – точка на поверхности стола (рис. 177). Найдём момент импульса шара относительно этой точки. Линия действия

силы трения проходит через точку  $P$ , значит, крутящий момент силы трения отсутствует. Сила тяжести и сила реакции стола компенсируют друг друга. Таким образом, нет сил, которые смогли бы изменить момент

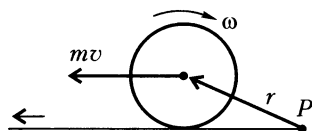


Рис. 177

импульса относительно выбранной точки. Поскольку шар сначала находился в покое, то момент импульса шара равен нулю.

Когда скатерть вытягивают из-под шара влево, он начинает скользить и вращаться. Следуя обозначениям на рисунке, момент импульса шара  $\vec{L}$  можно записать в виде

$$\vec{L} = I\vec{\omega} + [\vec{r} \times (m\vec{v})].$$

Здесь  $I$  – момент инерции и  $m$  – масса шара. Первый член в выражении соответствует вращению относительно центра масс шара, второй связан с движением центра масс. Принимая во внимание направления всех векторов, запишем величину момента импульса  $L$ :

$$L = I\omega + mvR,$$

где  $R$  – радиус шара. Легко видеть, что, когда шар катится без проскальзывания, знак его момента импульса, связанного с движением центра масс, должен совпадать со знаком угловой скорости. С другой стороны, сумма этих двух моментов должна быть всегда нулевой. Эти два условия могут быть выполнены только в том случае, если к моменту окончания проскальзывания тело остановилось. Читатель может проверить это экспериментально.

Конечное состояние не зависит ни от величины силы трения, ни от того, каким образом вытягивают скатерть. Она может вытягиваться равномерно, с постоянным ускорением или несколькими рывками. Для окончательного результата важно, что сопротивление воздуха и трение качения являются малыми. Если это не так, то они могут изменить момент импульса относительно точки  $P$  (который вначале был равен нулю).

**Р97.** Приняв направление вращения Земли (с запада на восток) за положительное, убеждаемся в том, что угловой импульс движения (момент импульса) относительно оси вращения Земли увеличился бы, если бы произошла замена левостороннего движения на правостороннее.

Это можно объяснить тем, что движение транспорта в восточном направлении привело бы к увеличению расстояния от оси Земли (из-за ширины дороги), а значит, и к увеличению ее

момента импульса. И наоборот, движение на запад снизило бы его значение. Принимая равными количества восточно-западного и западно-восточного направлений движения транспорта и считая момент инерции системы неизменным, получаем, что, поскольку полный момент импульса системы не может измениться, скорость вращения Земли должна уменьшиться. Это означает, что увеличилась бы продолжительность суток. Но, вы вряд ли обнаружили бы это!

Заметим, что в Австралии все было бы наоборот. А вот замена левостороннего движения на правостороннее для машин, движущихся на север или на юг, ничего не изменило бы ни для жителей Великобритании, ни для жителей Австралии.

**Р98.** Пусть  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – угловые ускорения маленького и большого шаров,  $a_1$  и  $a_2$  – линейные ускорения системы из двух шаров и тележки, на которой находятся шары. Поскольку шары катятся без проскальзывания, имеем

$$R\alpha_2 = a_2 - a_1 \text{ и } R\alpha_2 = r\alpha_1,$$

или, так как  $R = 2r$ ,

$$\alpha_1 = 2\alpha_2 = \frac{a_2 - a_1}{r}.$$

Момент инерции маленького шара равен  $(2/5)mr^2$ . Момент инерции большого шара с той же самой плотностью равен

$$\frac{2}{5}8m(2r)^2 = \frac{64}{5}mr^2.$$

Используя систему обозначений на рисунке 178, напомним следующие уравнения движения (поступательного и вращательного):

$$F - F_{\text{тр}} = Ma_2,$$

$$8mg + N_1 - N = 0,$$

$$F_{\text{тр}} - N_2 = 8ma_1,$$

$$mg - N_1 = 0, \quad N_2 = ma_1,$$

$$N_1 r \cos \varphi - N_2 r \sin \varphi = \frac{2}{5}mr^2\alpha_1,$$

$$\begin{aligned} 2rF_{\text{тр}} + 2N_2 r \sin \varphi - 2N_1 r \cos \varphi &= \\ &= \frac{64}{5}mr^2\alpha_2. \end{aligned}$$

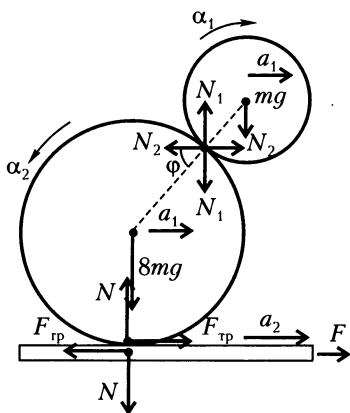


Рис. 178

Отсюда можно выразить силу  $F$ :

$$F = \left( 9m + \frac{7}{2} M \right) g \frac{\cos \varphi}{1 + \sin \varphi} \approx 79 \text{ Н}.$$

Ускорение шаров относительно тележки определяется формулой

$$\Delta a = (a_2 - a_1) = \frac{5}{2} g \frac{\cos \varphi}{1 + \sin \varphi}.$$

Через время  $t$ , когда шары упадут с тележки, относительно тележки они пройдут расстояние, равное  $L/2$ . Поскольку их начальные скорости нулевые, это время равно

$$t = \sqrt{\frac{L}{\Delta a}} \approx 0,55 \text{ с}.$$

*Примечание.* Интересно, что этот трюк можно также выполнить с меньшим шаром в горизонтальном положении ( $\varphi = 0$ ). В этой ситуации сила трения между шарами уравнивает силу тяжести меньшего шара. Более того, если коэффициент трения между шарами достаточно большой, возможна ситуация с отрицательным углом  $\varphi$ !

**Р99.** Рассмотрим сначала движение шара по его первоначальной прямолинейной траектории от точки отсчета  $P$ . На этом участке момент импульса шара горизонтален и направлен перпендикулярно его импульсу, т.е. скорости движения центра шара.

Оказавшись на вращающемся диске, шар будет подвержен действию дополнительной, помимо силы тяжести и силы реакции со стороны диска, силы трения о диск. Эта сила, лежащая в горизонтальной плоскости (независимо от ее конкретного направления), создает относительно точки  $P$  вертикально направленный момент сил, который будет изменять вертикальную проекцию момента импульса шара, но оставит неизменным его горизонтальную составляющую. Поэтому, когда шар покинет диск и покатится по столу без проскальзывания, его момент импульса будет горизонтальным и равным первоначальному. А это означает, что направление скорости центра шара будет совпадать с направлением скорости до попадания на диск.

Таким образом, из наших рассуждений следует, что первоначальный и конечный участки траектории шара будут лежать на параллельных прямых, по которым он будет катиться с одной и той же скоростью. Заметим, что при прохождении диска угловая

скорость шара может измениться, и тогда конечный участок его траектории будет сдвинут относительно первоначального. Но при удачном подборе угловой скорости вращения диска начальная и конечная траектории шара будут находиться на одной и той же прямой.

Итак, за движение шара отвечает закон сохранения момента импульса.

*Примечание.* Более громоздкое количественное рассмотрение движения шара (с использованием уравнений поступательного и вращательного движений) показывает, что в системе отсчета (неинерциальной), связанной с вращающимся диском, центр шара будет равномерно двигаться по окружности, центр которой не совпадает с центром диска. При этом угловая скорость шара будет составлять  $2/7$  скорости диска. Если диск вращается с постоянной угловой скоростью (независимо от величины), то последний участок движения шара как бы продолжает его первоначальный участок, т.е. лежит на той же самой прямой.

**Р100.** Пусть  $S$  – площадь поперечного сечения кольца,  $T$  – сила натяжения в кольце. Рассмотрим малый участок кольца длиной  $R\Delta\theta$  (рис.179). Его масса равна  $\rho SR\Delta\theta$ . Этот участок находится под действием двух сил натяжения  $T$ , которые в сумме обеспечивают центростремительное ускорение  $\omega^2 R$ , чтобы он вместе с кольцом двигался по окружности с заданной угловой скоростью  $\omega$ . Векторная сумма сил натяжения равна  $2T \sin(\Delta\theta/2)$ . Следовательно,

$$\rho SR^2 \omega^2 \Delta\theta = 2T \sin \frac{\Delta\theta}{2} \approx T \Delta\theta,$$

откуда получаем силу натяжения, приходящуюся на единицу площади поперечного сечения кольца:

$$\frac{T}{S} = \rho R^2 \omega^2.$$

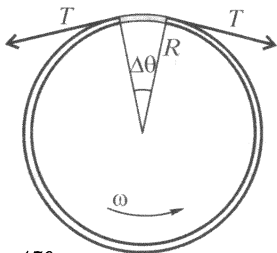
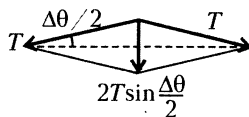


Рис. 179

Относительное удлинение стержня под действием силы растяжения пропорционально силе





натяжения, деленной на площадь сечения и на модуль Юнга:

$$\epsilon = \frac{T/S}{E}.$$

Таким образом, окончательно получаем, что длина окружности кольца увеличится на

$$\Delta l = \epsilon \cdot 2\pi R = \frac{2\pi R^3 \omega^2}{E}.$$

**P101.** Пусть  $F_0$  – сила, с которой тянут за один конец веревки, и  $F_m$  – максимальная сила, с которой можно тянуть другой конец без возникновения проскальзывания. Выделим мысленно маленький кусочек веревки длиной  $R\Delta\alpha$ , которая стягивает центральный угол  $\Delta\alpha$  (рис.180). Разность сил натяжения  $F + \Delta F$  и  $F$  уравнивается

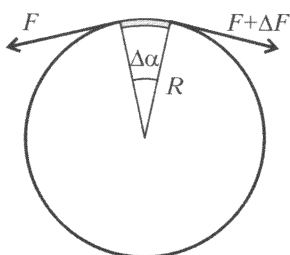


Рис. 180

силой трения покоя  $\Delta F_{\text{тр}}$ , которая возникает при попытке сдвинуть веревку относительно цилиндра. Максимальная сила

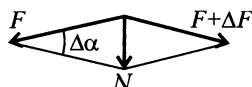


Рис. 181

трения (на грани скольжения) равна

$$\Delta F_{\text{тр}} = \mu N,$$

где  $\mu$  – коэффициент трения, который требуется определить,  $N$  – нормальная сила реакции, равная по величине сумме проекций сил натяжения на радиус, проведенный из середины нашего маленького кусочка веревки в центр окружности (рис.181). Из рисунка видно, что (поскольку  $F + \Delta F \approx F$ )

$$N = 2F \sin \frac{\Delta\alpha}{2} \approx F\Delta\alpha,$$

а значит,

$$\Delta F_{\text{тр}}(\alpha) = \Delta F(\alpha) = \mu F(\alpha) \Delta\alpha.$$

Переходя к бесконечно малым приращениям, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dF}{d\alpha} = \mu F(\alpha).$$

После разделения переменных, получаем

$$\frac{dF}{F} = \mu d\alpha, \text{ или } d(\ln F - \mu\alpha) = 0.$$

Тогда решение этого уравнения записывается в виде

$$F(\alpha) = F_0 e^{\mu\alpha}.$$

Двойное неравенство, сформулированное в задаче ( $F_A/2 \leq F_B \leq 2F_A$ ), позволяет записать уравнение

$$2F(0) = F(\pi) = F(0) e^{\mu\pi},$$

откуда получаем выражение для коэффициента трения:

$$\mu = \frac{1}{\pi} \ln 2 \approx 0,22.$$

*Примечание.* Сила натяжения веревки увеличивается в зависимости от угла  $\alpha$  по экспоненте. Поэтому отношение сил натяжения на концах веревки даже после небольшого числа оборотов может достигать нескольких порядков величины. Альпинисты используют этот факт для закрепления веревки, чтобы уберечься от падения со скалы. Моряки применяют ту же технику (наматывая веревку на кнехт), чтобы останавливать большие суда голыми руками.

**Р102.** Дженни рассматривает однородное кольцо радиусом  $R$  и линейной плотностью  $\rho$ , вращающееся с постоянной угловой скоростью  $\omega$  относительно оси, проходящей через его центр и перпендикулярной его плоскости. Центробежное ускорение точек на кольце равно  $R\omega^2$ , так что единичная длина кольца испытывает действие силы  $p = \rho R\omega^2$ .

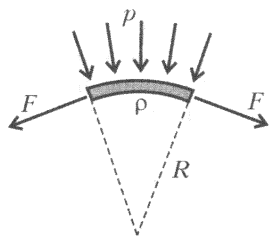


Рис. 182

По аналогии, если цилиндрический сосуд высотой 1 м окружить газом под давлением  $p$ , то сила, с которой газ давит на стенку цилиндра, будет той силой, которая требуется, чтобы обеспечить вращение кольца (рис.182).

В действительности, элементы кольца сохраняются на круговой орбите не внешним давлением, а собственным внутренним натяжением  $F$  кольца, величина которого определяется формулой

$$F = \rho R^2 \omega^2.$$

Это можно доказать, ссылаясь на задачу 100 или, например,

исследуя сосуд с полукруглым основанием длиной 1 м, окруженный газом с давлением  $p$  (рис.183). Сила  $2Rp$  действует на прямоугольник площадью  $2R$  и должна быть уравновешена силой  $2F$ , действующей по касательной в стенке.

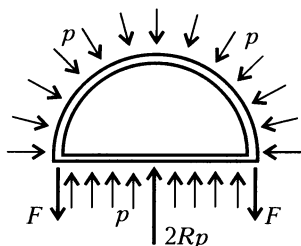


Рис. 183

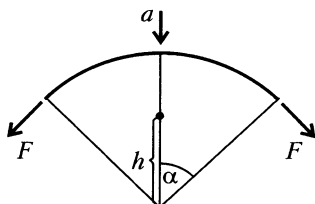


Рис. 184

Теперь Дженни исследует дугу кольца, которая стягивает центральный угол  $2\alpha$  (рис.184), и смотрит, как выполняется второй закон Ньютона. Результирующая сила, действующая на тело массой  $m = 2R\rho\alpha$ , равна  $2F \sin \alpha$ , а ускорение центра масс равно

$$a = h\omega^2,$$

где  $h$  – расстояние от центра кольца до центра масс дуги. Согласно второму закону Ньютона, можно записать

$$2F \sin \alpha = ma.$$

Используя предыдущие формулы, получаем

$$h = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}.$$

Для полукруга, как в первоначальной задаче Чарли,  $\alpha = \pi/2$ , и поэтому центр масс полукольца (точка  $C$ ) находится на расстоянии  $h = 2R/\pi$  от центра окружности.

Для определения центр масс кругового сектора необходимо разделить его на тонкие дуги и каждую заменить точечной массой, помещенной в центр масс дуги. Ту же самую методику можно принять для нахождения центра масс треугольника, сделанного из тонких полос. Это означает, что центр масс сектора должен находиться точно в том же самом месте, что и центр масс симметричного треугольника высотой  $h_{\max} = (R \sin \alpha)/\alpha$  (рис. 185), т.е. на расстоянии  $(2/3)(R \sin \alpha)/\alpha$  от его вершины. Этим выводом Дженни заканчивает демонстрацию своей экстраординарной логики.

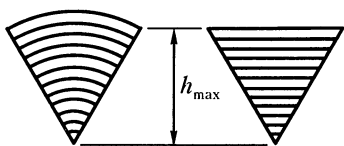


Рис. 185

**Р103.** Пусть  $L$  – общая высота стола и полная длина цепочки,  $x$  и  $m$  – длина и масса вертикально движущейся части цепочки. Уравнение движения, учитывающее изменяющуюся массу движущейся части цепочки

ки, запишем в виде

$$mg = \frac{d(mv)}{dt} = m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt},$$

или после перегруппировки –

$$m \frac{dv}{dt} = mg - v \frac{dm}{dt}.$$

Левая часть уравнения – это произведение движущейся массы на ускорение  $a$ , правую часть уравнения можно преобразовать и упростить, используя очевидные соотношения  $dm = (m/x)dx$  и  $dx/dt = v$ . Тогда получим

$$a = g - \frac{v^2}{x}.$$

Этот результат показывает, что ускорение цепочки меньше  $g$ . Второй член справа можно еще упростить, так как в случае прямолинейного движения с постоянным ускорением  $a$  и нулевой начальной скоростью  $v^2/x = 2a$ . Это означает, что если в данной задаче ускорение цепочки постоянно, то оно удовлетворяет уравнению

$$a = g - 2a,$$

откуда следует, что  $a = g/3$ . Мы угадали решение, но оно единственное!

Итак, первое звено цепочки упадет на стол через время

$$t_1 = \sqrt{\frac{2L}{a}} = \sqrt{\frac{6L}{g}} = 0,78 \text{ с}.$$

Когда нижний конец цепочки достигает земли, вся цепочка станет вертикальной, и ее скорость будет равна

$$v_1 = at_1 = \frac{g}{3} \sqrt{\frac{6L}{g}} = \sqrt{\frac{2Lg}{3}} = 2,56 \text{ м/с}.$$

С этого момента цепочка свободно падает. Ее последнее звено, имея начальную скорость  $v_1$ , падает с ускорением  $g$  и проходит

расстояние  $L$  за время  $t_2$ , которое можно найти из уравнения

$$L = v_1 t_2 + \frac{gt_2^2}{2}.$$

Отсюда получаем

$$t_2 = \sqrt{\frac{2L}{3g}} = \frac{t_1}{3} = 0,26 \text{ с}.$$

Так что заключительное звено цепочки достигает пола за время

$$t_1 + t_2 = \frac{4}{3} t_1 = 1,04 \text{ с}$$

после начала движения цепочки.

*Примечания.* а) Попытка применить закон сохранения энергии ведет к ложным результатам. Например, записав уравнение

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mgL}{2},$$

где  $L/2$  – уменьшение высоты центра масс цепочки, а затем подставив в него  $v_1 = \sqrt{2Lg/3}$ , придем к противоречивому результату:

$$\frac{mgL}{2} = \frac{mv_1^2}{2} = \frac{m}{2} \sqrt{\frac{2Lg}{3}} = \frac{mgL}{3}.$$

Оказывается, третья часть энергии исчезла, рассеялась из-за неупругих столкновений, появляющихся, когда падающая часть цепочки резко приводит в движение последующие звенья.

б) Задачу можно также решить другим способом. Пусть  $M$  – полная масса цепочки. Когда висящая часть цепочки массой  $m = (M/L)x$  приводит в движение следующую часть, масса которой  $(M/L)\Delta x = (M/L)v\Delta t$ , она ускоряет ее от нулевой скорости до скорости  $v$  за время  $\Delta t$ . Такое ускорение нуждается в силе

$$\frac{((M/L)v\Delta t)v}{\Delta t} = \frac{Mv^2}{L}.$$

Соответствующая сила реакции замедляет висящую часть цепочки, так что мы можем написать

$$ma = mg - \frac{Mv^2}{L}.$$

Подставляя сюда  $m = (M/L)x$ , мы получаем уже известное уравнение.

в) Предположение о том, что цепочка состоит из  $n$  звеньев с расстоянием между ними  $\epsilon = L/n$ , также приводит к правильному ответу в пределе  $n \rightarrow \infty$ .

**P104.** Мы покажем, что цепь (гибкая веревка), движущаяся с постоянной скоростью по замкнутой кривой произвольной формы, продолжает перемещаться таким же образом, даже если убрать сдерживающие предметы (например, шкивы, цилиндры и т.д.), придающие ей форму.

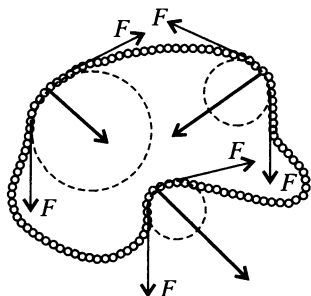


Рис. 186

Рассмотрим цепь, движущуюся устойчиво по некоторой замкнутой пространственной кривой со скоростью  $v$  (рис.186). Сила, растягивающая цепь, должна иметь одну и ту же величину  $F$  всюду, поскольку тангенциальное ускорение звеньев цепи равно нулю. Пусть  $\rho$  – масса единицы длины цепи. Если радиус кривизны цепи в некоторой точке равен  $R$  ( $R$  может изменяться в зависимости от выбранного места), то масса кусочка цепи длиной  $R\Delta\alpha$  равна  $\Delta m = \rho R\Delta\alpha$ , в то время как его центростремительное ускорение равно  $v^2/R$ . Можем записать уравнение движения для этого участка цепи (рис.187):

$$\rho R \Delta\alpha \frac{v^2}{R} = F \Delta\alpha,$$

откуда получаем

$$F = \rho v^2.$$

Заметим, что в этом выражении нет радиуса кривизны  $R$ , т.е. сила натяжения не зависит от радиуса кривизны. Таким образом, результирующая касательных сил является силой, которая заставляет цепь изгибаться, что она и делает в заданном месте. Если

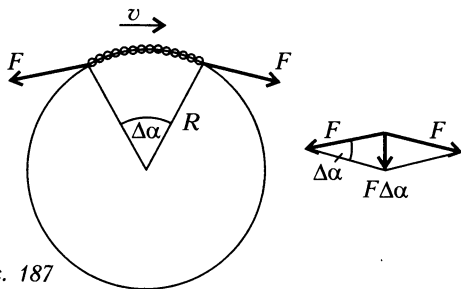


Рис. 187

цепь прямая, то результирующая сила, действующая на ее малую часть, равна нулю. Чем сильнее изогнута цепь, тем больше результирующая сила. Направление этой силы такое, как необходимо.

Это означает, что цепь падает, сохраняя свою первоначальную форму и скорость. Именно так и предполагал Фрэнк.

**P105.** Как показано в решении предыдущей задачи, гибкая цепь (или веревка) с массой  $\rho$  на единицу длины, перемещающаяся со скоростью  $v$ , натянута с силой

$$F = \rho v^2,$$

если она не контактирует с каким-либо другим телом. Там же было отмечено, что этот результат не зависит от радиуса  $R$  кривизны образованной дуги. Это также применимо к цепям или веревкам, перемещающимся по прямой линии, когда  $R$  можно формально принять бесконечно большим. Цепь становится изолированной от шкива, если в результате ее ускоряющегося движения выполняется условие  $F = \rho v^2$ .

Пусть  $x$  — смещение цепи,  $a$  — ускорение правой части цепи (рис.188). Тогда уравнения движения для каждой части цепи запишем в виде

$$F - \rho \left( \frac{L}{2} - x \right) g = \rho \left( \frac{L}{2} - x \right) a,$$

$$\rho \left( \frac{L}{2} + x \right) g - F = \rho \left( \frac{L}{2} + x \right) a.$$

Скорость цепи для любого  $x$  можно определить из закона сохранения энергии. Уменьшение потенциальной энергии цепи относительно первоначального состояния (для которого принята незначительная скорость) то же самое, как если бы часть цепи длиной  $x$  была опущена на  $x$ . Отсюда получаем

$$\rho x^2 g = \frac{\rho L v^2}{2}.$$

Исключив  $F$  и  $a$  из вышеупомянутых уравнений, найдем, что смещение  $x$  и скорость  $v$  в момент, когда цепь оставляет шкив, равны

$$x = \frac{\sqrt{2}L}{4} \approx 0,35L \quad \text{и} \quad v = \frac{\sqrt{Lg}}{2}.$$

Таким образом, цепь отделяется от шкива, когда 15% ее длины

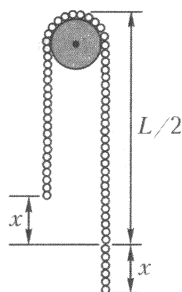


Рис. 188

все еще перемещается вверх, а ее скорость меньше, чем получилось бы, подставляя  $x = L/2$  в уравнение баланса энергии. Это ложное значение было бы равно  $\sqrt{Lg}/2 \approx 0,71\sqrt{Lg}$ .

*Примечание.* Последующее движение цепи также интересно. Петля, однажды отделенная от шкива, начинает перемещаться вверх с увеличивающейся скоростью. Скорость этой части цепи с уменьшающейся массой, в принципе, стремится к бесконечности. В действительности конечный размер звеньев цепи и сопротивление воздуха налагают верхний предел на скорость. Кинетическая энергия части цепи, перемещающейся вверх, остается конечной, несмотря на ее быстро увеличивающуюся скорость, потому что уменьшение массы соответствующей части цепи более быстрое, чем увеличение скорости.

То же самое явление может наблюдаться, например, когда щелкают кнутом. Конец кнута перемещается с постоянно увеличивающейся скоростью, и когда она достигает скорости звука, возникает резкий щелчок.

**Р106.** а) Исследуем движение петли в системе отсчета, которая перемещается с петлей со скоростью  $c$ . В этой системе участки круглой петли радиусом  $R$  равномерно вращаются. Часть веревки, которая стягивает центральный угол  $\Delta\alpha$  и обладает массой  $\rho R\Delta\alpha$ , имеет центростремительное ускорение  $c^2/R$ , которое обеспечивается силой натяжения веревки (см. решение задачи 105). Второй закон Ньютона дает

$$F\Delta\alpha = \rho R\Delta\alpha \frac{c^2}{R}.$$

Таким образом, «петля-волна» перемещается со скоростью  $c = \sqrt{F/\rho}$ , которая совпадает со скоростью, с которой мелкие поперечные волны распространялись бы по той же самой веревке.

б) Угловая скорость  $\omega$  катящейся петли радиусом  $R$  равна  $\omega = c/R$ , а петля имеет массу  $m = 2\pi R\rho$ . Энергия, которую несет петля, можно записать в виде

$$E = E_{\text{пост}} + E_{\text{вращ}} = \frac{1}{2}(2\pi R\rho)(c^2 + R^2\omega^2),$$

или

$$E(\omega) = 2\pi Fc \frac{1}{\omega} = K \frac{1}{\omega},$$

где  $K = 2\pi Fc$  – константа, характеризующая веревку и натяжение в ней. Конечно, может быть создано  $n$  петель одновременно.



Тогда их полная энергия будет равна

$$E_n(\omega) = nK \frac{1}{\omega}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Импульс петли (петель) можно рассчитать тем же способом:

$$p_n(\omega) = 2\pi R n c = nK \frac{1}{c\omega}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Аналогично, момент импульса будет равен

$$L_n(\omega) = \pm 2\pi R^2 n c = \pm nK \frac{1}{\omega^2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

В этой формуле два знака соответствуют петлям, перемещающимся над веревкой и под ней.

Заметим, что разрешены круговые «волнения» только отдельных частот – энергия, импульс и момент импульса могут принимать только дискретные значения, кратные «основному кванту». Следующие отношения определяют связь между этими (зависимыми от частоты) «квантами»:

$$E(\omega) = c p(\omega) = \omega L(\omega).$$

Нетрудно видеть, что те же самые соотношения справедливы для фотонов:

$$E_\phi = \hbar\omega, \quad p_\phi = \frac{\hbar\omega}{c}, \quad L_\phi = \pm \hbar.$$

Естественно, эту формальную аналогию не нужно принимать слишком серьезно, например думая о фотоне как об эквиваленте петли. Однако подобие можно использовать, чтобы показать, что даже в классической физике имеются объекты более сложные, чем точечная масса, которые являются легкими для понимания, но которые все еще могут быть возбуждены до многих дискретных значений энергий, импульса и момента импульса.

**Р107.** Объем песка массой  $\Delta m = 50$  кг за время  $\Delta t = 1$  с достигает скорости  $v = 1$  м/с, т.е. изменение его горизонтального импульса равно

$$\Delta p = v \Delta m = 50 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}.$$

Следовательно, сила, ускоряющая песок, равна

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{v \Delta m}{\Delta t} = 50 \text{ Н}.$$

Тогда работа, произведенная двигателем в единицу времени, т.е. его выходная мощность, составляет 50 Вт.

Когда песок падает на ленточный конвейер, он теряет свой вертикальный импульс. (Он ударяет о конвейер с силой, большей его веса). Песок на конвейере замедляется по вертикали и затем ускоряется по горизонтали. Кинетическая энергия песка за  $\Delta t = 1$  с увеличивается на  $\Delta mv^2/2 = 25$  Дж. Это означает, что половина мощности двигателя (25 Вт) преобразуется в кинетическую энергию песка, остальное идет на работу против сил трения и в конце концов превращается в тепло.

*Примечание.* Средняя скорость движения песка во время ускорения равна  $v/2$ . Поэтому мощность потерь на трение равна  $Fv/2 = 25$  Вт. Конвейер испытывает силу  $-F$ , мощность которой равна  $-Fv = -50$  Вт. Таким образом, чтобы ускорить песок, используется ровно половина мощности двигателя.

**Р108.** а) Сначала мы определяем скорость рулона как функцию расстояния, которое он прошел. Масса перемещающейся части рулона после прохождения расстояния  $x$  равна  $m(x) = M(1 - x/L)$ . Его скорость  $v(x)$  можно определить из закона сохранения энергии:

$$\frac{Mv_0^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{MR^2}{2} \left( \frac{v_0}{R} \right)^2 = \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{mr^2}{2} \left( \frac{v}{r} \right)^2,$$

где  $MR^2/2$  – момент инерции рулона, в который был скатан шланг массой  $M$  и радиусом  $R$ . Изменением потенциальной энергии и небольшой вертикальной скоростью, приобретенной в результате уменьшения радиуса рулона, пренебрегаем. Используя зависимость массы движущейся части рулона от расстояния  $x$ , найдем скорость  $v$ :

$$v(x) = \frac{v_0}{\sqrt{1 - x/L}}.$$

С увеличением  $x$  скорость также увеличивается, т.е. рулон ускоряется по мере того как разворачивается.

Полное время, требуемое для разворачивания рулона, можно получить, интегрируя величину, обратную функции  $v(x) = dx/dt$ :

$$T = \int_0^T dt = \int_0^L \frac{dx}{v(x)} = \frac{1}{v_0} \int_0^L \sqrt{1 - \frac{x}{L}} dx = \frac{L}{v_0} \int_0^1 \sqrt{1 - u} du = \frac{2}{3} \frac{L}{v_0}.$$

Так как рулон ускоряется, время, требуемое для его разворачивания, очевидно, меньше, чем если бы рулон разворачивался с постоянной скоростью.

б) Систему, состоящую из рулона уменьшающейся массы, движущегося с увеличивающейся скоростью, и неподвижной горизонтальной части увеличивающейся длины, нельзя, очевидно, рассматривать как точечную массу. Поэтому основной закон динамики нельзя применять к ней в простой форме  $F = ma$ , а надо использовать его более общую форму:

$$\sum F_{\text{внеш}} = \frac{dp_{\Sigma}}{dt},$$

где  $p_{\Sigma}$  — импульс системы в целом.

Полный импульс перемещающегося мотка (и целиком системы) равен

$$p(x) = m(x)v(x) = M\left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{v_0}{\sqrt{1 - \frac{x}{L}}} = Mv_0 \sqrt{1 - \frac{x}{L}}.$$

Ясно, что при увеличении  $x$  импульс уменьшается. Это указывает на тот факт, что масса движущейся части уменьшается быстрее, чем увеличивается ее скорость. Поэтому результирующая сила  $F(x)$ , действующая на систему, противоположна направлению движения и равна

$$F(x) = \frac{dp}{dt} = v(x) \frac{dp}{dx} = - \frac{Mv_0^2}{2L\left(1 - \frac{x}{L}\right)}.$$

**Р109.** Поле тяготения внутри тонкой сферической оболочки с однородно распределенной массой равно нулю. Вне этой оболочки поле такое, как будто масса оболочки сконцентрирована в ее центре. На глубине 100 км от поверхности Земли поле тяготения определяется двумя факторами. С одной стороны, масса оставшейся шаровой части Земли меньшего радиуса должна уменьшить гравитационное ускорение. С другой стороны, центр Земли ближе, поэтому есть тенденция к увеличению  $g$ . Какой эффект является более сильным?

Кора толщиной 100 км соответствует 4,6 процента от полного объема Земли (радиус Земли 6400 км), но ее масса составляет только 2,5 процента от полной массы Земли. Гравитационное ускорение можно рассчитать как  $g = GM/r^2$ , где  $M$  — масса шара радиусом  $r$ . На глубине 100 км эффективная масса Земли (без ее коры) равна  $M = 0,975M_3$ , а радиус равен  $r = (6300/6400)r_3 = 0,984r_3$ . Подставляя эти данные в выражение для  $g$ , находим, что на глубине 100 км гравитационное ускорение на 0,7 процента больше, чем на поверхности Земли!

Это и понятно — кора имеет меньшую плотность, чем ядро Земли.

Можно показать, что  $g$  увеличивается при приближении к центру, если плотность коры составляет не больше чем две трети средней плотности Земли.

**P110.** Будем считать, что испытательное отверстие имеет незначительный объем по сравнению с объемом целого астероида. Пусть  $\rho$  — плотность астероида, а  $R$  — его радиус. Гравитационное ускорение на расстоянии  $r$  от центра астероида то же самое, как на поверхности шара радиусом  $r$ :

$$g(r) = \frac{Gm(r)}{r^2} = \frac{G(4/3)\rho\pi r^3}{r^2} = \frac{4}{3}\rho\pi Gr.$$

Таким образом, гравитационное ускорение прямо пропорционально расстоянию от центра астероида и всегда направлено к центру. Это означает, что первый зеленый человечек приблизился к центру астероида, совершая гармонические колебания с амплитудой  $R$ , и после первой четверти колебания произошло несчастье. Коэффициент при  $r$  в вышеупомянутом выражении соответствует квадрату угловой частоты  $\omega$ , т.е.  $\omega = 2\sqrt{\rho\pi G/3}$ . Поэтому продолжительность падения была

$$T_1 = \frac{T}{4} = \frac{2\pi/\omega}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3\pi}{\rho G}}.$$

Скорость  $v_1$ , с которой человечек столкнулся с основанием отверстия, можно найти как произведение амплитуды на угловую частоту:

$$v_1 = R\omega = 2R\sqrt{\frac{\rho\pi G}{3}}.$$

Ко времени второй аварии зеленые человечки уже выкопали восьмую часть материала в астероиде. Необходимо определить поле тяготения в сферической полости, простирающейся от поверхности планеты к ее центру. Это можно сделать, хитроумно используя принцип суперпозиции (наложения). Вообразите, что полость заполнена смесью нормального титана и титана отрицательной плотности. В сумме эти два титана образуют пустое место, что нам и нужно. Но теперь мы можем поле тяготения в полости заменить суммой гравитационных полей сплошного шара из титана и шарика из титана с отрицательной плотностью. Схематически это показано на рисунке 189. Вектор  $\vec{r}$  направлен из центра астероида к произвольной точке  $P$  в полости, вектор  $\vec{c}$

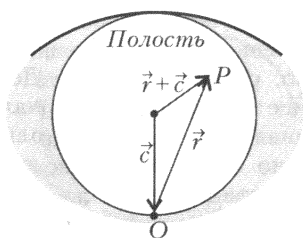


Рис. 189

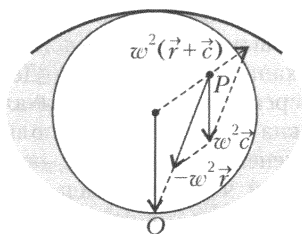


Рис. 190

направлен от центра полости к центру астероида и вектор  $\vec{r} + \vec{c}$  направлен от центра полости к точке  $P$ .

Заметим, что гравитационные ускорения равны произведению  $\omega^2$  на соответствующие радиусы-векторы, с учетом знака материала вещества. Результирующее ускорение (рис. 190), равное

$$\vec{g} = -\omega^2 \vec{r} + \omega^2 (\vec{r} + \vec{c}) = \omega^2 \vec{c},$$

оказывается в любом месте полости постоянным по величине и направлению. Это означает, что гравитационное ускорение в полости равно  $\omega^2 R/2$ , что эквивалентно ускорению в середине глубины испытательного канала (т.е. в центре полости).

*Примечание.* Подобным образом можно показать, что в любой сферической полости поле однородно, а создаваемое им гравитационное ускорение равно ускорению на глубине центра полости для сплошного тела.

Продолжительность  $T_2$  падения и скорость соударения  $v_2$  второго несчастного зеленого человечка можно рассчитать так же, как падение тел с постоянным ускорением:

$$T_2 = \sqrt{\frac{2R}{\omega^2 R/2}} = \frac{2}{\omega} = \sqrt{\frac{3}{\pi \rho G}}, \quad v_2 = T_2 \frac{\omega^2 R}{2} = 2R \sqrt{\frac{\rho \pi G}{3}}.$$

Таким образом, отношения, сообщенные экспертом, были такими:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\pi}{4}, \quad \frac{v_1}{v_2} = 1.$$

Получается, что второй несчастный зеленый человечек затратил несколько больше времени, чтобы упасть, чем первый, но они оба ударились о центр астероида с одной и той же скоростью.

То, что конечные скорости обоих человечков оказались одинаковыми, можно пояснить с точки зрения закона сохранения механической энергии. Действительно, разность кинетических энергий человечка в начале и в конце падения должна быть равна изменению его полной потенциальной энергии. Но это изменение для обоих человечков одно и то же, поскольку второй человек падает в полости с отрицательной плотностью между точками равного гравитационного потенциала, а изменение потенциалов поля сплошного титанового шара для обоих человечков одно и то же.

**P111.** Вообразим, что полушарие разделено на множество концентрических полусферических оболочек одинаковой толщины (рис.191). Какая сила действует

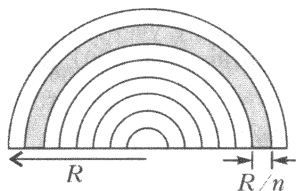


Рис.191

на зонд единичной массы, находящийся в центре сферы, со стороны этих оболочек? Так как масса оболочки прямо пропорциональна квадрату ее радиуса, а сила, действующая на зонд со стороны оболочки, обратно пропорциональна квадрату ее радиуса, то гравитационные ускорения в

центре сферы одни и те же для всех полусферических оболочек.

Если имеется  $n$  оболочек, то масса наиболее удаленной оболочки равна  $2\pi R^2 (R/n) \rho$ , где  $R$  – радиус астероида,  $\rho$  – его плотность. Полное поле тяготения, создаваемое всем полушарием, в  $n$  раз больше, чем от одной оболочки. Будем считать, что масса всех оболочек полушария сосредоточена в его наиболее удаленной (поверхностной) оболочке с массой, равной  $2\pi R^3 \rho$ . Масса этой вспомогательной оболочки оказывается в три раза больше фактической массы полушария. Сила, которая действует на зонд со стороны этой полусферической оболочки массой  $M$ , такая же, как и сила, с которой наш зонд единичной массы действует на оболочку. Значит, на единицу площади поверхности оболочки будет действовать сила

$$p = G \frac{M / (2\pi R^2)}{R^2} = \frac{G\rho}{R}.$$

Чтобы просуммировать эту силу по всей оболочке, можно рассмотреть аналогичную ситуацию нахождения силы, создаваемой жидкостью под давлением  $p$  на подобную полусферическую оболочку (рис.192). Так как результирующая сила давления жидкости на полное полушарие была бы нулевой, сила, действу-

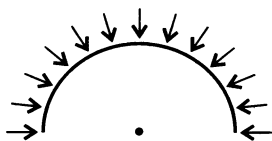


Рис. 192

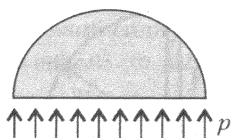


Рис. 193

ющая на его полусферическую поверхность, будет той же самой по величине, как и сила, действующая на его плоскую поверхность (рис. 193). Таким образом,

$$g = \pi R^2 = G\pi R.$$

Исходное гравитационное ускорение на поверхности астероида было

$$g_0 = G \frac{\rho \cdot 4\pi R^3/3}{R^2} = \frac{4}{3} G\rho\pi R.$$

Поэтому рассчитанное нами ускорение равно

$$g = \frac{3}{4} g_0 = 7,36 \text{ см/с}^2.$$

Заметим, что, зная плотность титана, можно определить первоначальный радиус астероида:  $R \approx 78 \text{ км}$ .

**Р112.** Мы могли бы вычислить работу  $A$ , необходимую для того, чтобы раздвинуть две половины астероида на расстояние  $d' = 1 \text{ м}$  при силе притяжения  $F$ :

$$A = Fd.$$

Но каким образом это можно сделать? Конечно, не непосредственно. Нужно найти какой-то другой метод.

Гравитационная потенциальная энергия системы увеличивается, когда полушария удаляются друг от друга. Искомая работа  $A$  совпадает с этим увеличением.

Увеличение энергии можно рассчитать, определив работу, проделанную небольшими зелеными человечками по переносу металла астероида из объема диска радиусом  $R$  и толщиной  $d$  к поверхности астероида. Будем считать, что извлеченный металл выносился к поверхности с помощью устройств с малым трением и затем распределялся равномерно по поверхности астероида.

Если  $g$  – гравитационное ускорение на поверхности астероида массой  $M$ , то гравитационное ускорение на расстоянии  $x$  от центра равно  $g(x) = gx/R$ . Плотность астероида равна  $\rho = 3M/(4\pi R^3)$ . Рассмотрим кольцо объемом  $\Delta V = d \cdot 2\pi x \Delta x$  и

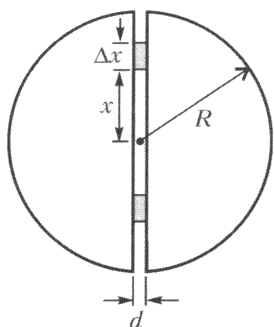


Рис. 194

массой  $\Delta m = \rho \Delta V$ , которое первоначально располагалось между радиусами  $x$  и  $x + \Delta x$  (рис.194). Чтобы металл, находящийся внутри этого кольца, поднять на поверхность астероида, нужно совершить некоторую работу. Найдём ее.

Если ускорение в точке  $x$  равно  $gx/R$ , то гравитационный потенциал в этой точке (по сравнению с потенциалом в центре астероида) равен  $gx^2/(2R)$ . На поверхности астероида потенциал гравитационного поля равен  $gR/2$ . Поэтому изменение потенциальной энергии нашего кольца, поднятого на поверхность, равное произведенной работе, будет равно

$$\Delta A = \Delta m \left( \frac{gR}{2} - \frac{gx^2}{2R} \right) = \frac{\Delta mg (R^2 - x^2)}{2R} = \frac{3Mgd}{4R^4} (R^2 - x^2) x \Delta x.$$

Полная работа равна сумме работ при извлечении титана с различных глубин:

$$A = \sum \Delta W = \frac{3Mgd}{4R^4} \sum (R^2 - x^2) x \Delta x.$$

В пределе при  $\Delta x \rightarrow 0$  сумма становится равной  $R^4/4$ . Поэтому окончательно

$$A = \frac{3}{16} Mgd.$$

Итак, «мифический гигант» при разведении полушарий на расстояние  $d$  должен совершить работу  $A = \frac{3}{16} Mgd$ , а сила, требуемая для этого, составляет  $F = \frac{3}{16} Mg$ . Это и есть сила притяжения между полушариями, которую должны выдержать опоры.

Зная радиус астероида и плотность титана, эту силу можно определить численно:

$$F = \frac{3}{16} M \frac{GM}{R^2} = \frac{3}{16} \left( \frac{4\pi\rho R^3}{3} \right)^2 \frac{G}{R^2} = \frac{GR^4 (\pi\rho)^2}{3} \approx 4,5 \cdot 10^{13} \text{ Н}.$$



Чтобы почувствовать порядок величины такой силы, вычислим среднее давление, оказываемое этой силой:  $p = F/(\pi R^2) = 1,4 \cdot 10^5$  Па – это в полтора раза больше атмосферного давления, действующего на Земле. На Земле эта сила соответствует весу 14 тонн вещества; такой груз должны нести достаточно сильные опоры.

**Р113.** Напряженность электрического поля  $E$  вблизи поверхности заряженной сферы, целой или состоящей из двух, расположенных близко друг к другу частей (рис.195), равна

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2}.$$

Плотность электрического заряда на поверхности составляет

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}.$$

Заряд  $\Delta Q = \sigma \Delta S$ , находящийся на малом участке поверхности  $\Delta S$ , испытывает на себе со стороны электрического поля силу, равную

$$\Delta F = \frac{1}{2} E \Delta Q.$$

Множитель «1/2» присутствует потому, что напряженность электрического поля в этом месте равна  $E/2$ . Действительно, поскольку поля внутри сферы нет, а снаружи напряженность равна  $E$ , напряженность  $E/2$  создает сам выделенный малый участок поверхности (по принципу суперпозиции), но его действие на себя мы должны исключить.

Сила, действующая на единицу площади заряженной поверхности, равна тогда

$$\frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 R^4} = p.$$

Искомую силу можно сравнить с силой, с которой жидкость под давлением  $p$  расталкивала бы изнутри две части сферы. Поскольку эта сила есть результат воздействия давления  $p$  на площадку  $\pi(R^2 - h^2)$ , то

$$F = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 R^4} \pi(R^2 - h^2) = \frac{Q^2(R^2 - h^2)}{32\pi\epsilon_0 R^4}.$$

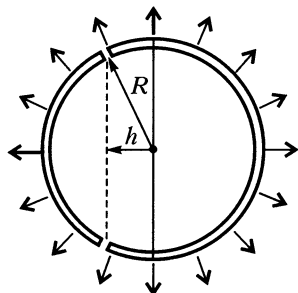


Рис. 195



Если газ выпустить в большой воздушный шар, то его давление уменьшится до внешнего атмосферного давления  $p_0$ . Поэтому конечный объем газа станет

$$V = \frac{4\pi R^3}{3} \frac{p}{p_0}.$$

Подъемная сила этого шара, конечно, не может быть больше чем  $Vg\rho_{\text{возд}}$  (где  $\rho_{\text{возд}}$  — плотность воздуха), поскольку силы тяжести воздушного шара и водорода должны быть вычтены из выталкивающей силы. Сила тяжести контейнера равна  $4\pi R^2\rho g d$ . Разумеется, она не может быть больше чем сила, способная поднять его:

$$4\pi R^2\rho g d < \frac{4\pi R^3}{3} \frac{p}{p_0} g\rho_{\text{возд}}. \quad (2)$$

Неравенства (1) и (2) дают такое соотношение между свойствами материала контейнера и давления газа в нем:

$$\frac{\sigma}{\rho} > \frac{3p_0}{2\rho_{\text{возд}}}. \quad (3)$$

Интересно, что ни радиус, ни толщина стенок контейнера не вошли в это соотношение! (Контейнер с более толстыми стенками может выдержать более высокое давление, но имеет больший вес.) Ни в одной таблице физических величин мы не смогли найти материал, который соответствовал бы полученным требованиям. Все материалы, известные на сегодня, недостаточно прочны (относительно их плотностей).

**Р116.** Гравитационное ускорение  $g$  на поверхности сферической Земли радиусом  $R$ , массой  $M$  и плотностью  $\rho$  можно выразить так:

$$g = G \frac{M}{R^2} = G \frac{4\pi\rho R^3}{3R^2} = \frac{4\pi}{3} G\rho R.$$

Чтобы решить задачу, мы должны найти величину гравитационного ускорения на поверхности очень большой пластины толщиной  $H$  и плотностью  $\rho$  в точке, удаленной от ее краев. Используем аналогию между законами, описывающими электростатические и гравитационные взаимодействия. Действительно, легко увидеть аналогию между массой  $m$  (гравитационный заряд) и электрическим зарядом  $q$ , гравитационной постоянной  $G$  и коэффициентом  $1/(4\pi\epsilon_0)$ , гравитационным ускорением  $g = F/m$  и напряженностью электрического поля  $E = F/q$ . В обоих случаях  $F$  — сила, испытываемая «пробным зарядом». Опреде-

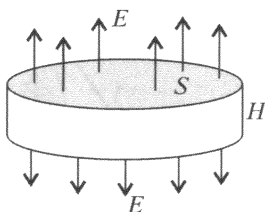


Рис. 198

лим напряженность электрического поля вне бесконечно большой пластины, несущей равномерно распределенный заряд, затем заменим аналогичные величины, чтобы получить гравитационное ускорение.

Напряженность электростатического поля можно рассчитать, применив теорему Гаусса к небольшой выделенной области площадью  $S$  (рис.198):

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_0} \Sigma q ,$$

где  $\Phi = 2SE$  – поток вектора электрического поля. Пусть  $\rho_q$  – плотность электрического заряда, тогда полный заряд, окруженный замкнутой поверхностью, есть  $\Sigma q = \rho_q SH$ . Поэтому

$$2SE = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_q SH ,$$

откуда получаем выражение для напряженности  $E$  электрического поля:

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\rho_q H}{2} .$$

Используя соответствующие аналогии, найдем гравитационное ускорение:  $g = 2\pi\rho GH$ . По условию задачи, оно должно быть равно гравитационному ускорению, измеренному на поверхности Земли:

$$\frac{4\pi}{3} GR\rho = g_{\text{сф}} = g_{\text{пл}} = 2\pi\rho GH .$$

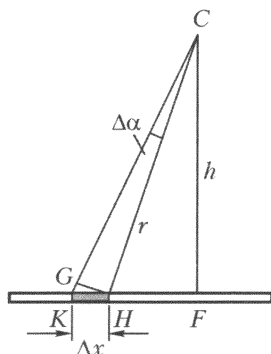


Рис. 199

Отсюда можно выразить толщину  $H$  плоской Земли:

$$H = \frac{2R}{3} = \frac{2 \cdot 6370 \text{ км}}{3} = 4250 \text{ км} .$$

**Р117.** Выделим на стержне очень маленький участок  $KH$  длиной  $\Delta x$ , который виден из точки  $C$  под углом  $\Delta\alpha$  (рис.199). Из подобия треугольников  $FHC$  и  $GKH$  можно записать следующие равенства:

$$\Delta x = GH \frac{r}{h} = r \Delta\alpha \frac{r}{h} = \frac{r^2}{h} \Delta\alpha .$$

Так как на отрезке  $KH$  находится заряд  $\Delta Q = \sigma \Delta x$ , где  $\sigma$  – заряд, приходящийся на единицу длины, то величина напряженности электрического поля от этого заряда определяется выражением

$$\Delta E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma}{h} \Delta\alpha.$$

Эта величина непосредственно не зависит от угла  $\alpha$ , а зависит только от угла  $\Delta\alpha$ , под которым виден малый отрезок  $\Delta x$  из точки  $C$ . Таким образом, векторы напряженности электрического поля от малых отрезков заряженного стержня, расположенных симметрично относительно биссектрисы угла  $C$ , имеют ту же самую величину, и их результирующая направлена вдоль биссектрисы (рис. 200).

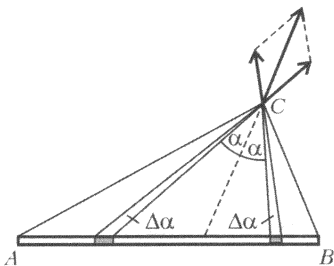


Рис. 200

Ясно, что для любой заданной точки  $C$  найдется такое значение  $\alpha$ , при котором  $\angle ACB = 2\alpha$ , и тогда, суммируя результаты для согласованных пар маленьких отрезков стержня, получаем результат для всего стержня в целом.

**Р118.** Используя результат предыдущей задачи, можно сказать, что направление электрического поля в точке плоскости на расстоянии  $h$  от конца бесконечно длинного стержня составляет угол  $45^\circ$  со стержнем.

Величину напряженности  $E$  электрического поля можно найти, используя следующую «уловку». Представим себе, что два очень длинных равномерно заряженных стержня соединены вплотную. Результирующая напряженность поля будет равна векторной сумме напряженностей полей от двух половин стержня (рис. 201). Направление результирующей напряженности, очевидно, перпендикулярно стержню (ввиду симметрии), а ее величина в  $\sqrt{2}$  раз больше напряженности поля  $E$  от одного стержня.

Поле бесконечного заряженного стержня можно найти с помощью закона Гаусса. Окружим отрезок бесконечно длинного стержня длиной  $l$  вообра-

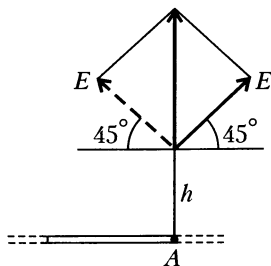


Рис. 201

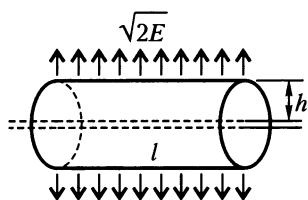


Рис. 202

жаемым цилиндром радиусом  $h$  (рис.202). Внутри цилиндра находится заряд  $Q = l\sigma$ , где  $\sigma$  – заряд, приходящийся на единицу длины. Тогда поток вектора напряженности электрического поля  $\Phi$  через поверхность цилиндра будет равен

$$\Phi = \sqrt{2}E \cdot 2\pi hl.$$

Согласно закону Гаусса,

$$\epsilon_0 \Phi = Q.$$

Отсюда получаем

$$E = \frac{\sqrt{2}}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma}{h}.$$

**Р119.** а) Когда угол  $2\theta$  достигает  $2\pi$ , точка  $P$  оказывается между проводами, причем бесконечно близко к ним, так что обе половины токопроводящего провода создают очень большие магнитные поля в точке  $P$  в одном и том же направлении. Таким образом, в этом случае величина суммарного магнитного поля в вершине угла приближается к бесконечности. Так как  $\operatorname{tg}(\theta/2)$  также приближается к бесконечности, когда  $\theta$  приближается к  $\pi$ , то формула Ампера может быть правильной. Выражение, предложенное Био и Саваром, должно быть неправильным, так как оно дает конечное значение для  $B$ . Фактически, результат Ампера был позже включен в электромагнитную теорию Максвелла и теперь является общепринятым в физике.

б) При  $2\theta = \pi$  V-образный провод становится прямым бесконечным проводом. Для этого случая, как известно,  $B = \mu_0 I / (2\pi d)$ . Так как  $\operatorname{tg}(\theta/2) = \operatorname{tg}(\pi/4) = 1$ , коэффициент пропорциональности в формуле Ампера равен  $\mu_0 I / (2\pi d)$ .

Био и Савар выбрали свою формулу таким образом, что она согласуется с уже общепринятым выражением для магнитного поля для прямого бесконечного провода с током. Поэтому в качестве коэффициента пропорциональности у них был множитель  $\mu_0 I / (\pi^2 d)$ .

*Примечание.* В области  $\theta < \pi/2$  разность между этими двумя предсказаниями относительно мала. Отношение предсказанных величин индукции магнитного поля будет равно  $2\theta / (\pi \operatorname{tg}(\theta/2))$ . Оно имеет самое большое значение  $4/\pi$ , когда  $\theta \rightarrow 0$ .

**Р120.** а) Если индукцию магнитного поля в точке  $P$  обозна-

чить  $B_1$ , то симметрично расположенная вторая катушка (как показано на рисунке 203) также создаст магнитное поле индукцией  $B_1$ . Так как величина результирующего поля равна  $B_0$ , получается, что  $B_1 = B_0/2$ .

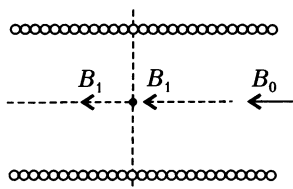


Рис. 203

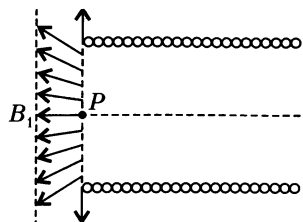


Рис. 204

б) Приведенные рассуждения показывают, что горизонтальная составляющая вектора индукции магнитного поля  $B_1$  в точке  $P$  равна  $B_0/2$ ; это верно для любой точки  $P$ , расстояние которой от оси меньше  $R$  (рис.204). Поэтому полный магнитный поток, пронизывающий торец соленоида, равен  $\pi R^2 (B_0/2)$ . Это – ровно половина потока магнитного поля внутри соленоида. А что случится с другой половиной?

в) Качественный рисунок картины линий магнитного поля можно видеть на рисунке 205. Линия поля, пересекающая самый крайний виток со-

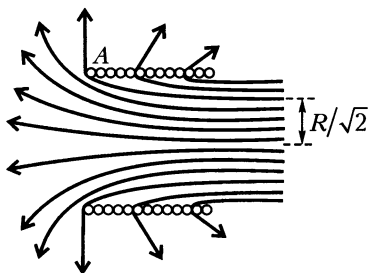


Рис. 205

леноида (точка  $A$ ), уходит перпендикулярно соленоиду. Одна половина линий индукции идет налево от соленоида, вторая половина линий выходит из катушки между витками. Такие «выходящие» линии магнитного поля наблюдаются вплоть до глубины  $R/\sqrt{2}$ .

**Р121.** Если мы представим, что положительные заряды на одной из пластин изменены на отрицательные той же самой величины, то кулоновские силы останутся теми же по величине, но их направление изменится. Вместо отталкивания мы получим притяжение между пластинами. Но это имеет место для конденсаторов с плоскопараллельными пластинами.

Энергия, запасенная в таком конденсаторе с расстоянием  $x$  между пластинами, равна

$$W = \frac{Q^2}{2C},$$

где  $C$  – емкость конденсатора, определяемая по формуле

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{x}.$$

Следовательно,

$$W = \frac{Q^2 x}{2\epsilon_0 S}.$$

Сила взаимодействия пластин равна производной от энергии конденсатора по координате  $x$ , т.е.  $F = dW/dx$ . Таким образом, сила, требуемая для удержания пластин площадью  $S$  вместе, равна

$$F = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S}.$$

**Р122.** Пока пары пластин  $AB$  и  $CD$  находятся отдельно друг от друга, напряжение на конденсаторе  $AB$  равно  $U_{AB} = 1 \text{ нКл}/20 \text{ пФ} = 50 \text{ В}$ . Напряжение на конденсаторе  $CD$  равно  $2/5$  от напряжения  $U_{AB}$  (так как расстояние между пластинами  $CD$  меньше расстояния между пластинами  $AB$  в  $2/5$  раза), т.е.  $U_{CD} = 20 \text{ В}$ . Напряженности электрического поля внутри обеих пар пластин одинаковы.

При внесении пластин  $CD$  внутрь пластин  $AB$  заряды на пластинах измениться не могут. Напряженность электрического поля внутри конденсатора  $CD$  увеличится в два раза за счет поля конденсатора  $AB$ . Значит, напряжение между пластинами  $CD$  увеличится в два раза и станет равным  $40 \text{ В}$ .

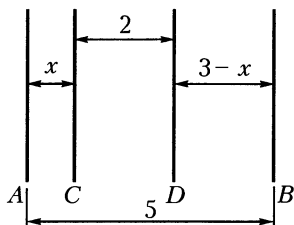


Рис. 206

В зазоре между пластинами  $AC$  и  $DB$  (рис.206) напряженность электрического поля останется прежней. Поэтому независимо от  $x$  суммарное напряжение в зазоре будет равно  $30 \text{ В}$ .

Итого, разность потенциалов между пластинами  $AB$  будет равна

$$40 \text{ В} + 30 \text{ В} = 70 \text{ В}.$$

**Р123.** Мысленно распределим заряд  $Q$  с равномерной плотностью заряда  $\sigma = Q/S$  по плоскости, параллельной обкладкам конденсатора в том месте, куда был помещен точечный заряд  $Q$  (рис.207). При этом никаких изменений во внешних цепях не произойдет. Заменим эту мысленную плоскость реальной тонкой пластиной. Тогда мы можем заметить, что весь заряд  $Q$  разделился на два заряда:  $Q_x$  на нижней стороне пластины и  $Q - Q_x$  на



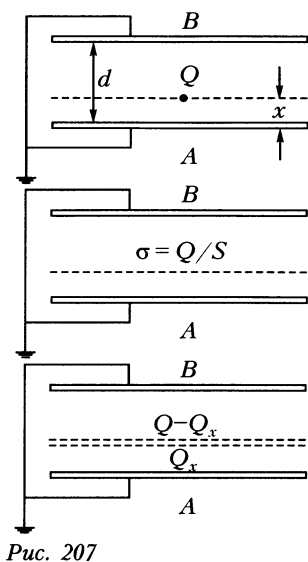


Рис. 207

верхней стороне пластины. Разделим пластину на две тончайшие пластины с находящимися на них зарядами и просто соединим их проводом. Мы получим схему из двух параллельно соединенных конденсаторов, которые заряжены суммарным зарядом  $Q$  (рис.208). Теперь, так как напряжения на конденсаторах одинаковы, заряды на них распределяются пропорционально их

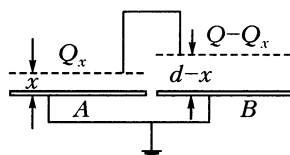


Рис. 208

емкостям, т.е. обратно пропорционально расстояниям между обкладками.

Поскольку полный заряд на пластинах равен  $Q$ , соответствующие заряды на пластинах будут равны

$$Q_A = -Q \frac{d-x}{d} \text{ и } Q_B = -Q \frac{x}{d}.$$

**Р124.** На достаточно большом удалении от конденсатора электрическое поле определяется полным электрическим зарядом системы. Электрическое поле вне конденсатора равно нулю, поэтому полный электрический заряд (сумма зарядов на пластинах) должен быть также нулевым. Это означает, что  $Q_1 = -Q_2 = Q$ .

Поведение электрического поля электрически нейтральной системы определено ее полным электрическим дипольным моментом. В нашем случае система представляет собой плоский конденсатор и электрический диполь внутри него. Взяв составляющую суммарного дипольного момента на нормаль к пластинам, получим

$$p - Qd = 0,$$

откуда находим заряды на пластинах:

$$Q = \frac{p}{d}.$$

Таким образом, заряды на пластинах не зависят от положения диполя внутри конденсатора.

*Примечания.* а) Тот же самый метод можно применить и в задаче 123. Соответствующие уравнения будут иметь вид

$$\begin{aligned} Q_A + Q_B + Q &= 0, \\ Q_A x - Q_B (d - x) &= 0, \end{aligned}$$

откуда получим

$$Q_A = -Q \frac{d-x}{d}, \quad Q_B = -Q \frac{x}{d}.$$

б) Наоборот, мы можем использовать результат предыдущей задачи и, помещая в конденсатор диполь, т.е. два заряда противоположных знаков, применить принцип суперпозиции. Это – простой способ найти решение общей задачи, в которой дипольный момент не обязательно перпендикулярен пластинам.

**Р125.** Рисунок 209 иллюстрирует прохождение луча света через последовательные плоскопараллельные пластины с различными показателями преломления.

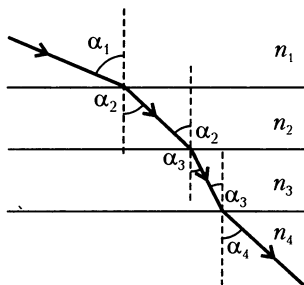


Рис. 209

Согласно закону преломления (закону Снеллиуса),

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} &= \frac{n_1}{n_2}, \\ \frac{\sin \alpha_3}{\sin \alpha_2} &= \frac{n_2}{n_3}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Легко заметить, что произведение синуса угла падения на абсолютное значение показателя преломления пластинки, в которой находится этот луч, есть величина постоянная при всех переходах через границу сред, т.е.

$$n_i \sin \alpha_i = \text{const}$$

вдоль всей траектории луча света.

Это справедливо и для среды, показатель преломления которой непрерывно изменяется в одном направлении, так как ее можно представить в виде суммы тонких плоскопараллельных пластин. Поместим начало системы координат в точке, где луч света входит в среду (рис.

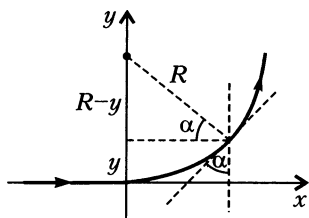


Рис. 210

210). В этом случае луч падает на первую пластину в точке  $y = 0$  под углом  $90^\circ$ . Тогда показатель преломления  $n_0$  этой пластины дает вышеупомянутую константу:

$$n(y) \sin \alpha = n_0.$$

Свет распространяется по дуге окружности радиусом  $R$ . Исследует его связь с координатой  $y$ . Из рисунка видно, что

$$n_0 = n(y) \sin \alpha = n(y) \frac{R - y}{R}.$$

Отсюда следует, что показатель преломления должен зависеть от  $y$  так:

$$n(y) = n_0 \frac{R}{R - y}.$$

Материал с самым большим известным показателем преломления — это алмаз, его показатель преломления не превышает значения  $n_{\text{макс}} = 2,5$ . Именно этот предел устанавливает максимальный угловой размер дуги, по которой может пройти луч света. Действительно, если показатель преломления изменяется от  $n_0 = 1$  до  $n_{\text{макс}} = 2,5$ , то максимальное значение  $y_{\text{макс}} = 3R/5$ , что соответствует дуге с углом раствора  $66,4^\circ$ .

Практически, трудно удержать свет на дуге окружности. Однако можно составить растворы, в которых концентрация равномерного вещества такова, что показатель преломления непрерывно увеличивается по высоте. Для такой среды луч света распространяется хотя и не по дуге окружности, но по некоторой непрерывной кривой.

*Примечание.* Почему луч света, входящий в среду по оси  $x$ , вообще начинает изгибаться? Причина в том, что не существует бесконечно тонкого луча света; луч всегда подразумевает пучок конечной ширины. Попав в среду с изменяющимся в направлении, перпендикулярном профилю пучка, показателем преломления (а значит, и скорости света), фронт волны становится неплоским, и пучок изгибается.

**Р126.** Используя линейку, вы можете измерить внутренний диаметр области для хранения информации на компакт-диске: приблизительно 4,4 см и внешний диаметр: приблизительно 11 см. Это означает, что полезная площадь поверхности равна приблизительно  $80 \text{ см}^2$ . В расчете на единицу информации, т.е. на 1 бит, получим

$$S = \frac{80 \text{ см}^2}{650 \cdot 10^6 \cdot 8} = 1,54 \cdot 10^{-8} \text{ см}^2.$$

Считая площадку для записи единицы информации квадратом ( $S = a^2$ ), оценим ее линейный размер:

$$a = \sqrt{S} = 1,24 \cdot 10^{-4} \text{ см} = 1,24 \text{ мкм}.$$

Информация на компакт-диске хранится (как вариант) в очень длинной спирали, начинающейся около центра и раскручивающейся к периферии диска. Маленький участок компакт-диска можно использовать в качестве отражательной дифракционной решетки, которая даст возможность определить «линейный размер» бита по дифракционной картинке, полученной, например, с помощью лазера. Период решетки — это ширина углублений на диске. Самое простое — использовать нормальное падение луча и измерить расстояние между двумя дифракционными максимумами первого порядка на экране; расстояние между компакт-диском и экраном удобно взять 1 м.

Условие для максимума первого порядка в дифракционной картине имеет вид  $d \sin \theta_1 = \lambda$ , где  $d$  — период решетки,  $\theta_1$  — угловой размер первого максимума,  $\lambda$  — длина волны падающего света. Характерная длина волны красного оптического лазера  $\lambda = 670 \text{ нм}$ . Экспериментально было получено  $\theta_1 \approx 25^\circ$ . Тогда для периода решетки получаем  $d \approx 1570 \text{ нм} = 1,57 \text{ мкм}$ .

Эта оценка несколько больше, чем наша предыдущая, хотя и близка к ней. Разница между двумя результатами — не ошибка измерения, а следствие наличия разделяющих стенок между соседними углублениями. В обоих случаях оценка «линейного размера» единицы информации, заложенной в компакт-диск, получается порядка 1 мкм.

*Примечание.* Информационная плотность на компакт-дисках постоянна, но скорость вращения диска изменяется, согласно позиции считывающей головки.

**Р127.** Из уравнения дифракционной решетки найдем

$$n\lambda = d \sin \theta = (10^{-3} \text{ м}/300) \sin 24,46^\circ = 1380 \text{ нм}.$$

Отсюда получаем возможные значения для  $n$  и  $\lambda$ , чтобы красный и сине-фиолетовый свет вместе попали в соответствующие части дифракционного спектра:

$$n_{\text{кр}} = 2 \text{ для } \lambda_{\text{кр}} = 690 \text{ нм} \text{ и } n_{\text{сф}} = 3 \text{ для } \lambda_{\text{сф}} = 460 \text{ нм}.$$

Во всяком случае,

$$n\lambda \leq d \sin 90^\circ = 3333 \text{ нм},$$

и единственная другая пара целых чисел, находящихся в отно-

шении  $3m/2m$  с целым  $m$  меньше чем  $3333/1380 = 2,4$ , это 6 и 4. Таким образом, имеется еще только один угол, под которым будет наблюдаться двухкомпонентная линия:

$$\theta^* = \arcsin \frac{6 \cdot 460}{3333} = 55,9^\circ.$$

**Р128.** а) Когда монохроматический лазерный пучок падает на дифракционную решетку под прямым углом, условия максимумов дифракционной картины даются уравнением

$$d \sin \theta = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots,$$

где  $d$  – период решетки,  $\lambda$  – длина волны лазерного пучка,  $\theta$  – угол, под которым наблюдается соответствующий максимум. Если решетка поворачивается на угол  $\varphi$  вокруг оси, параллельной линиям решетки, мы должны изменить вышеупомянутое уравнение.

Достаточно рассмотреть интерференцию только об двух щелей решетки, как показано на рисунке 211. Оптическая разность хода двух лучей, уходящих под углом  $\theta$  к горизонту, состоит теперь из двух частей: до решетки и после нее, поэтому

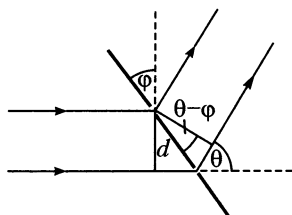


Рис. 211

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = d \sin \varphi + d \sin (\theta - \varphi).$$

Таким образом, измененное уравнение для дифракционных максимумов получится таким:

$$d (\sin \varphi + \sin (\theta - \varphi)) = m\lambda.$$

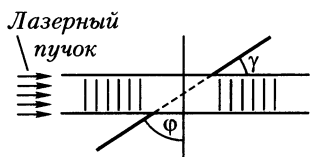

Основной результат такого вращения состоит в том, что наблюдаемая дифракционная картина становится асимметричной, только положение максимума нулевого порядка остается на месте. Если считать  $\varphi$  положительным, когда решетка вращается против часовой стрелки (и  $\theta$  считается положительным в том же самом направлении), то плотность дифракционных максимумов становится больше при положительных углах и меньше для отрицательных. Если щели решетки вертикальны, все дифракционные максимумы лежат вдоль горизонтальной прямой. Это должно противоречить тому, что наблюдается в пункте 6).

*Примечание.* Наивно думать, что вращение решетки должно уменьшить эффективный размер периода решетки. Это неверно.

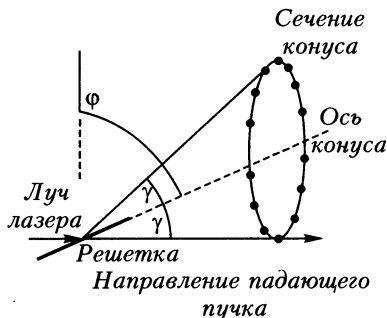
б) Так как дифракционная решетка это совокупность большого числа идентичных параллельных щелей, в качестве первого шага достаточно рассмотреть дифракцию от одной щели. Если пучок падает перпендикулярно на очень тонкую щель, то дифракционная картина представляет собой слабо освещенную полосу поперек щели. Если щель немного увеличить, то вдоль этой полосы можно увидеть дифракционные минимумы.

Когда вертикальная щель наклонена «вперед» (т.е. вращается вокруг горизонтальной оси, которая является перпендикулярной к щели и к падающему пучку), максимум нулевого порядка остается неизменным. Хотя проходящий пучок падает на различные участки щели с разными фазами, вне щели в направлении падающего пучка нет никаких фазовых различий и нет никакого изменения в дифракционной картине.

Представим щель в виде большого числа близко расположенных очень маленьких отверстий. Тогда мы должны признать, что вторичные волны, выходящие из отверстий в направлении падающего пучка, образуют дифракционную картину. Это верно и для всех других направлений вторичных пучков (в трех измерениях), которые образуют тот же самый угол с направлением щели. Если щель наклонена под углом  $\varphi$ , то угол между щелью и падающим пучком равен  $\gamma = 90^\circ - \varphi$  (рис.212). Тот же самый угол  $\gamma$  (между щелью и падающим лучом) образуется для любого луча,



*Puc. 212*



*Рис. 213*

который находится на поверхности конуса (является его образующей) с углом раствора  $2\gamma$  и направлением щели в качестве его оси. На экране мы увидим сечение этого конуса (рис.213). Вершина конуса находится в центре щели. Коническое сечение может быть эллипсом, параболой или гиперболой. В частности, парабола получается при  $\gamma = \varphi = 45^\circ$ .

Возвращаясь к нашей задаче, можно сказать, что дифракционная картина наклоненной решетки состоит из ярких пятен, находящихся на коническом сечении.

**Р129.** Из-за поверхностного натяжения жидкости, высота ее уровня между двумя плавающими телами и снаружи не одинакова: для воды она внутри больше, а для ртути – меньше (рис.214).

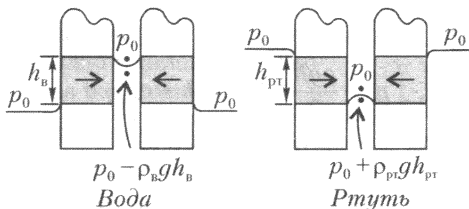


Рис. 214

В воде непосредственно под изогнутой поверхностью (мениском) давление меньше атмосферного давления  $p_0$  на величину  $\rho_v g h_v$ . Поэтому в области выделенных на рисунке участков давление между телами везде меньше наружного давления.

В ртути непосредственно под мениском давление больше атмосферного на величину  $\rho_{pt} g h_{pt}$ . Поэтому в выделенной области давление между телами равно атмосферному, а снаружи оно везде больше атмосферного.

И в случае воды, и в случае ртути силы давления снаружи оказываются больше, чем изнутри, и тела «притягиваются» друг к другу.

**Р130.** Давление воды под изогнутой поверхностью изменяется линейно с высотой. На дне мениска оно равно внешнему атмосферному давлению  $p_0$ , а наверху оно равно  $p_0 - \rho g h$ . Среднее давление  $p_{cp}$  на стенку аквариума на участке высотой  $h$  равно

$$p_{cp} = p_0 - \frac{\rho g h}{2}.$$

Сила  $F_1$ , соответствующая этому давлению, для аквариума с боковой стенкой длиной  $l$  будет равна

$$F_1 = p_{cp} l h.$$

Такая же по величине сила действует на воду внутри мениска со стороны стенки.

Рассмотрим горизонтальные силы, действующие на объем воды внутри мениска (он ограничен пунктирными линиями на рисунке 215). Стенка толка-

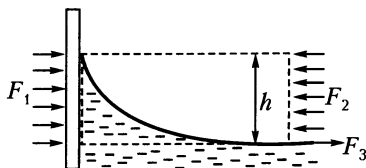


Рис. 215

ет воду вправо с силой  $F_1$ , внешний воздух толкает ее влево с силой  $F_2 = p_0lh$ , а сила поверхностного натяжения со стороны остальной части воды действует на нее вправо с силой  $F_3 = \sigma l$ . Результирующая этих сил должна быть равна нулю, так как вода внутри мениска находится в покое. Это означает, что

$$\left(p_0 - \frac{\rho gh}{2}\right)lh - p_0lh + \sigma l = 0,$$

откуда мы можем выразить величину  $h$ :

$$h = \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,073}{1000 \cdot 10}} \text{ м} = 0,0038 \text{ м}.$$

Вода поднимается по стенке аквариума приблизительно на 4 мм.

**Р131.** Когда радиус  $R$  капли воды с коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$ , который равен поверхностной энергии на единицу площади поверхности, уменьшается на  $\Delta R$ , поверхностная энергия тоже уменьшается. Изменение энергии можно записать в виде

$$\Delta E_{\text{пов}} = 4\pi\sigma(R^2 - (R - \Delta R)^2) \approx 8\pi\sigma R \Delta R.$$

В то же самое время объем капли уменьшается на  $4\pi R^2 \Delta R$ . Чтобы это количество воды испарилось, необходима энергия

$$E_{\text{испар}} = 4\pi\rho R^2 \Delta R L,$$

где  $\rho$  – плотность воды,  $L$  – удельная теплота парообразования воды.

Уменьшение поверхностной энергии может обеспечить парообразование капли с поверхности, если  $\Delta E_{\text{пов}} > E_{\text{испар}}$ , т.е. при условии

$$R < \frac{2\sigma}{\rho L} \approx 7 \cdot 10^{-11} \text{ м}.$$

Так как этот радиус имеет тот же порядок величины, что и размер одной молекулы воды, капля воды с таким радиусом не может существовать. Поэтому нет никакой капли воды, которая может испариться без поглощения тепла или за счет своей внутренней энергии. Однако вышеупомянутое рассуждение может быть использовано при оценке размеров молекул, проявляющих макроскопические свойства.

**Р132.** Рассмотрим закрытый сосуд, содержащий некоторое количество жидкости и ее насыщенный пар, заполняющий остальную часть сосуда. Пусть капиллярная трубка радиусом  $r$  погружена в жидкость, которая не смачивает ее стенки (рис.216).



В этих условиях уровень жидкости в капиллярной трубке опускается на  $h$  относительно поверхности жидкости в сосуде. Величину  $h$  можно найти, используя условие равновесия между гидростатической силой и силой поверхностного натяжения жидкости:

$$2\pi r\sigma = \rho g h \pi r^2,$$

где  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения жидкости,  $\rho$  – ее плотность. Это условие дает

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g r}.$$

Жидкость находится в равновесии со своим насыщенным паром и в капиллярной трубке, и на плоской поверхности жидкости. В капиллярной трубке, однако, давление пара у поверхности немного выше. Разность вызвана давлением столба пара высотой  $h$  и плотностью  $\rho_{\text{п}}$  над поверхностью. Из этого следует, что

$$\Delta p_{\text{п}} = \rho_{\text{п}} g h = \frac{2\sigma}{r} \frac{\rho_{\text{п}}}{\rho}.$$

Так как  $\rho_{\text{п}} \ll \rho$ , эта разность между давлениями намного меньше, чем разность давлений за счет кривизны, соответствующей радиусу  $r$ . Но если подождать существенное время, то этого может оказаться достаточно.

**Р133.** Пусть  $S$  – площадь поперечного сечения поршня,  $y$  – вертикальное смещение между его начальным и конечным положениями равновесия (рис.217).

Уменьшение потенциальной энергии груза массой  $m$  увеличивает внутреннюю энергию воздуха внутри цилиндра. Закон сохранения энергии дает

$$mgy = \frac{5}{2}(p_1 S(h - y) + p_2 S(h + y) - 2p_0 S h),$$

где  $p_1$  – конечное давление в нижней части,  $p_2$  – конечное давление в верхней части,  $p_0$  – начальное давление воздуха в цилиндре, а внутренняя энергия воздуха, состоящего из двухатомных молекул, выражена в виде  $(5/2)pV$ . Если груз очень тяжелый, то уменьшение его потенциальной энергии (и соответствующее увеличение внутренней энергии возду-

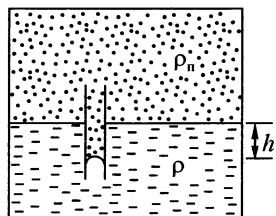


Рис. 216

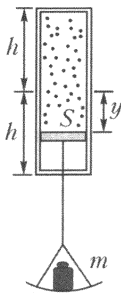


Рис. 217

ха) очень большое, и начальной внутренней энергией воздуха можно пренебречь. Таким образом,

$$mgy = \frac{5}{2}(p_1 S(h-y) + p_2 S(h+y)).$$

Когда поршень находится в покое,

$$(p_1 - p_2)S = mg.$$

Температуры и массы воздуха в обеих половинах цилиндра одинаковы, поэтому их внутренние энергии тоже должны быть одинаковыми:

$$\frac{5}{2}p_1 S(h-y) = \frac{5}{2}p_2 S(h+y).$$

Из полученных уравнений находим, что смещение поршня равно  $y = \sqrt{5/7}h$ , т.е. газ в нижней части цилиндра сжат до  $1 - \sqrt{5/7} \approx 0,15$  его первоначального объема.

*Примечание.* Получили удивительный результат – объем воздуха в нижней части не имеет тенденции стать нулевым, каким бы тяжелым ни был груз, даже при том, что газы, как предполагается, являются сжимаемыми! Большой груз увеличивает внутреннюю энергию и, следовательно, температуру замкнутого газа. Это приводит к значительным увеличениям не только самих давлений, но и разности между давлениями в нижней и верхней частях сосуда. Практически, масса груза ограничена механической устойчивостью структуры и температурами плавления используемых материалов. Мы должны также учесть ограничение на рост температуры, чтобы воздух все еще можно было считать идеальным двухатомным газом.

Если начальной внутренней энергией воздуха не пренебрегать, тогда результат будет такой:

$$\frac{y}{h} = \frac{\sqrt{35m^2 g^2 + 25p_0^2 S^2} - 5p_0 S}{7mg}.$$

**Р134.** Рассмотрим гору, имеющую форму коробки со средней плотностью  $\rho$ , площадью основания  $S$  и высотой  $h$ . Чтобы расплавить слой ее основания толщиной  $d$  и удельной теплотой плавления  $\lambda$ , потребовалась бы энергия  $\lambda \rho dS$ . Полная масса горы составляет  $\rho hS$ , поэтому высвобожденная энергия при опускании на расстояние  $d$  была бы равна  $\rho ghSd$ . Основание горы не будет плавиться под своим весом, если

$$\rho \lambda dS > \rho ghSd, \text{ т.е. } h < \frac{\lambda}{g}.$$

Подставив сюда известные значения удельной теплоты плавления типичных металлов ( $(200 - 300) \text{ кДж/кг}$ ), можем оценить максимально возможную высоту гор на Земле как  $(20-30) \text{ км}$ . Это правильный порядок величины.

Заметим, что мы не учитывали тот факт, что размер гор может быть ограничен пределом текучести составляющих их материалов.

Гравитационное ускорение на Марсе значительно меньше, чем на Земле ( $g_M \approx 4 \text{ м/с}^2$ ). Поэтому горы, состоящие из подобных земным пород, могли бы быть на Марсе выше, чем на Земле. Действительно, самая высокая гора на Марсе – гора Олимпия – имеет высоту  $26 \text{ км}$ !

**Р135.** На рисунке 218 схематически представлен рассматриваемый процесс вытеснения ртути из пробирки при подведении тепла воздуху, находящемуся в нижней части пробирки.

Считаем воздух двухатомным идеальным газом, поэтому его молярная теплоемкость при постоянном объеме равна

$$C_V = \frac{5R}{2}.$$

По условию задачи высота ртути в пробирке равна  $L = 152 \text{ см}/2 = 76 \text{ см}$ . Это означает, что давление, создаваемое таким столбиком ртути, как раз равно атмосферному давлению:

$$p = \rho g L = 76 \text{ см рт.ст.} = 760 \text{ мм рт.ст.} = p_0.$$

Поэтому разумно ввести безразмерные переменную

$$\xi = \frac{x}{L},$$

через которую можно выразить все необходимые величины. Действительно, для объема рассматриваемого воздуха имеем

$$V = V_0 (1 + \xi).$$

Кроме того, из условия задачи следует, что давление воздуха всегда определяется высотой оставшейся в трубке ртути. Поэтому для давления можно записать

$$p = p_0 (2 - \xi).$$

Из уравнения Клапейрона–Менделеева, уравнения состояния

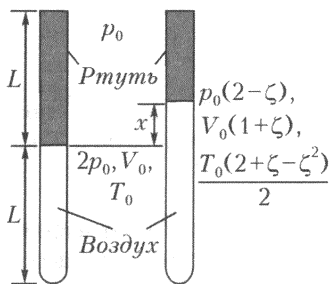


Рис. 218

для идеального газа, в исходном состоянии:

$$2p_0V_0 = \nu RT_0$$

определяем количество молей воздуха:

$$\nu = \frac{2p_0V_0}{RT_0}.$$

Тогда уравнение состояния в любой момент процесса:

$$pV = \nu RT$$

примет вид

$$(2 - \xi)(1 + \xi) = \frac{2T}{T_0},$$

или

$$t = \frac{2 + \xi - \xi^2}{2},$$

где  $t = T/T_0$  – вторая безразмерная переменная. Таким образом, реальная температура  $T$  воздуха в процессе равна

$$T = T_0 t.$$

Рисунок 219 объясняет некоторые характерные особенности рассматриваемого процесса. В безразмерных переменных  $p/p_0$  и  $V/V_0$  график представляет собой отрезок прямой  $AF$ . Отметим, что температура в процессе изменяется таким образом, что в конце процесса она снова принимает исходное значение. На графике это иллюстрируется с помощью изотерм для  $T_A = T_F = T_0$  и для  $T_B = (9/8)T_0$ .

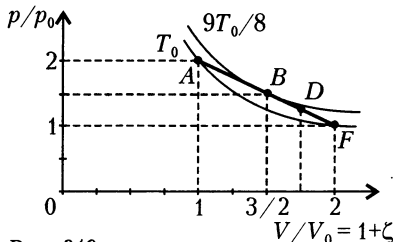


Рис. 219

Теперь рассмотрим процесс подвода тепла к воздуху. Из первого начала термодинамики следует

$$\Delta Q = \nu C_V \Delta T + p \Delta V,$$

откуда для нашего случая имеем

$$\Delta Q = \frac{2p_0V_0}{RT_0} \frac{5R}{2} T_0 \Delta t + p_0 (2 - \xi) V_0 \Delta \xi = p_0 V_0 (5 \Delta t + (2 - \xi) \Delta \xi).$$

Поскольку  $\Delta t = (1 - 2\xi) \Delta \xi / 2$ , то

$$\Delta Q = \frac{3}{2} p_0 V_0 (3 - 4\xi) \Delta \xi.$$

Это уравнение позволяет определить значение  $\xi_1$  переменной, начиная с которого уже не требуется тепла для вытеснения ртути:

$$\xi_1 = \frac{3}{4}, \text{ т.е. } x = \frac{3}{4} L.$$

На графике это точка  $D$ .

Интересно, что при подводе тепла температура сначала увеличивается, а потом уменьшается, хотя тепло еще поступает. Это наступает в тот момент, когда  $dt/d\xi = 0$ , т.е. при  $\xi_2 = 1/2$  (на графике это точка  $B$ ).

Определим теперь, что происходит с теплоемкостью воздуха в нашем квазистатическом процессе. С учетом введенных обозначений и определения теплоемкости  $C$  получаем выражение для теплоемкости при любом значении переменной  $\xi$ :

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{1}{T_0} \frac{\Delta Q}{\Delta \xi} \frac{\Delta \xi}{\Delta t} = \frac{1}{T_0} p_0 V_0 \cdot \frac{3}{2} (3 - 4\xi) \frac{2}{1 - 2\xi} = 3 \frac{p_0 V_0}{T_0} \frac{3 - 4\xi}{1 - 2\xi}.$$

Это выражение показывает, что теплоемкость в процессе изменяется в широких пределах. На рисунке 220 представлен график зависимости теплоемкости  $C$  (деленной на величину  $3p_0 V_0 / T_0$ ) от переменной  $\xi$ . Кривая имеет разрыв (сингулярность), который означает, что молярная теплоемкость при  $\xi = 1/2$ , т.е. при объеме  $V = 3V_0/2$ , стремится к бесконечности. Физически это происходит потому, что в окрестности этой точки изображенный отрезком прямой процесс является хорошей аппроксимацией изотермы, отвечающей максимуму температуры, достигаемой в нашем процессе. Но, как известно, при изотермическом процессе тепло передается, но изменения температуры не происходит, именно поэтому

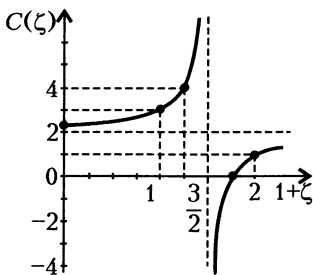


Рис. 220

теплоемкость и обращается в бесконечность. Выше указанного значения объема теплоемкость становится отрицательной. Это означает, что, несмотря на полученное тепло, внутренняя энергия системы уменьшается, поскольку работа, производимая

расширяющимся газом, больше полученного системой количества теплоты.

Наиболее интересна та часть процесса, которая относится к значениям объема вблизи  $V = 7V_0/4$ , т.е. когда в трубке осталась только четверть начального количества ртути. В этой точке теплоемкость обращается в ноль, что отвечает адиабатическому процессу, когда температура меняется без подвода тепла. В окрестности этой точки наша прямая является касательной к адиабате. Правее этой точки температура уменьшается, но теплоемкость становится положительной, что естественно для процесса охлаждения. Если продолжать сообщать системе тепло, то процесс пойдет дальше не по прямой, а по адиабате. Температура будет падать, но не так, как в случае нашего процесса, происходящего по прямой. Уменьшение внутренней энергии воздуха будет равно работе, производимой им против атмосферного давления во время выталкивания оставшейся ртути вверх с ускорением.

Возвращаясь к исходному вопросу задачи, касающегося нахождения количества теплоты, требуемого для удаления ртути из пробирки, нетрудно заметить, что подвод тепла к системе необходимо осуществлять в интервале значений объема воздуха от  $V = V_0$  до  $V = 7V_0/4$ . Простой расчет показывает, что работа воздуха, в расчете на моль, при этом составит  $39R/32$ , в то время как внутренняя энергия системы увеличится, соответственно, на  $15R/32$ . Отсюда количество теплоты, которое необходимо сообщить  $\nu$  молям воздуха для вытеснения ртути из пробирки, будет равно

$$Q = \frac{27}{16} \nu R.$$

**Р136.** Расплавленная магма пришла в контакт со льдом, и огромные объемы льда оказались расплавленными со стороны основания ледника. Поскольку плотность воды больше, чем плотность льда (т.е. объем образовавшейся воды меньше, чем соответствующий объем льда), и некоторая часть воды могла утечь, подо льдом сформировалась огромная коническая полость. Но чрезвычайно тяжелый лед над полостью (толщина его 500 м) продавился, образовав углубление на поверхности ледника. Под ледяным кратером мы могли бы обнаружить гору из недавно затвердевшей магмы, которая растопила лед (рис.211). Количество растаявшего льда зависит от количества магмы, но форма ледяного кратера определяется гидростатическим давлением льда и воды.

Извержение прорвалось через ледник на второй день, и сформировалось горячее черное облако золы высотой 500 м. Это облако под действием выталкивающей силы холодного воздуха поднялось до высоты 3000 м. Через две недели столб облака стал белым и достиг высоты 10 км.

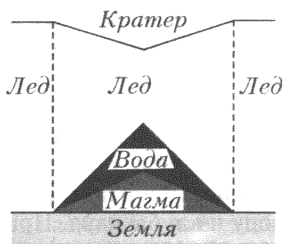


Рис. 221

В целом за две недели извержения расплавилось  $3 \text{ км}^3$  льда. Образовавшаяся вода вытекла из-под ледника в озеро, расположенное в пределах близлежащей вулканической впадины. На ледяной поверхности в месте извержения сформировалась глубокая впадина длиной 8 км и шириной несколько сотен метров. Скорость таяния была чрезвычайно высокой, в течение первых четырех дней – до  $0,5 \text{ км}^3$  в день. В то же самое время подо льдом появилась новая гора длиной 0,6 км и высотой 150–300 метров.

Растаявшая вода находилась под ледником в течение пяти недель, прежде чем она утекла. Это явление сопровождалось гигантской волной, которая двигалась поперек юго-восточных низменностей, уничтожая все на своем пути (дороги, мосты и т.д.).

**Р137.** Предположим, что полость расположена на глубине  $h$  под поверхностью. Когда канал заполнен водой, давление в полости равно  $p = p_0 + \rho gh$ , где  $p_0$  – атмосферное давление,  $\rho$  – плотность воды в канале. Кипение начинается на глубине, где температура такова, что давление насыщенного водяного пара  $(A e^{-L_m/(RT)})$  оказывается равным  $p$ . Значение молярной теплоты парообразования  $L_m$  приблизительно равно 40 кДж/моль, а значение универсальной газовой постоянной  $R$  составляет 8,3 Дж/(моль · К). Используя эти данные и тот факт, что температура кипения воды при атмосферном давлении равна 373 К, можно определить константу  $A$ :  $A = 4,1 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ .

Для оценки будем считать, что температура земли у поверхности равна  $T_0 = 290 \text{ К}$  и увеличивается на один градус на каждый метр глубины  $h$  по формуле  $T = T_0 + \alpha h$ , где  $\alpha = 1 \text{ К/м}$ . Используя равенство давлений, можно записать условие, при котором начинает кипеть вода:

$$p_0 + \rho gh = A e^{-\frac{L_m}{R(T_0 + \alpha h)}}.$$

Это трансцендентное уравнение, которое может быть решено численными методами, дает  $h \approx 200$  м. Давление на такой глубине равно приблизительно 20 атм при температуре 487 К = 214 °С. Когда начинается кипение, пар поднимается и с силой выталкивает воду из канала. В результате давление на глубине уменьшается почти до 1 атм. Перегретая вода при 214 °С начинает сильно кипеть, выбрасывая на поверхность горячую воду и клубы пара. При этом вода в полости быстро остывает до 100 °С. Уменьшение температуры на  $\Delta T = 114$  °С освободило избыточную внутреннюю энергию  $cm\Delta T$ , где  $c$  – удельная теплоемкость воды,  $m$  – масса воды в полости. Этой энергии достаточно, чтобы образовать пар массой  $m_{\text{п}} = 44$  т:

$$cm\Delta T = Lm_{\text{п}},$$

где  $L = 3,3 \cdot 10^5$  Дж/кг – удельная теплота парообразования воды. После подстановки соответствующих данных находим массу  $m$  воды в полости:  $m = 207$  т. Так как плотность воды при такой высокой температуре равна приблизительно 850 кг/м<sup>3</sup>, объем полости получается около 244 м<sup>3</sup>.

**Р138.** Уход количества теплоты за счет теплопроводности за малый интервал времени должен быть равен количеству теплоты, необходимому для таяния льда, которое равно произведению удельной теплоты плавления льда на массу образовавшегося за это время льда. Таким образом, для площади  $S$  озера получаем

$$\lambda_{\text{л}} S \frac{\Delta T}{x} = L \frac{d}{dt} (\rho_{\text{л}} S x).$$

Простое интегрирование приводит к равенству

$$t = \frac{x^2 B}{2}, \quad \text{где } B = \frac{\rho_{\text{л}} L}{\lambda_{\text{л}} \Delta T}.$$

Подстановка соответствующих числовых значений дает для времени приблизительно 90 часов.

**Р139.** Согласно закону теплопроводности, переданное количество теплоты прямо пропорционально градиенту температур, площади и времени. Пусть  $t$  – время,  $c$  – удельная теплоемкость,  $S$  – площадь поверхности,  $\nabla T$  – градиент температур,  $l$  – линейный размер тела. Тогда имеем

$$t \sim \frac{c}{S \nabla T} \sim \frac{l^3}{l^2 l^{-1}} = l^2.$$

Так как масса  $M \sim l^3$ , то время пропорционально  $M^{2/3}$ . Значит,



на размораживание мамонта должно уйти  $2(8000/5)^{2/3}$  дней, т.е. приблизительно девять месяцев, предполагая, что индейка и мамонт начинают таять при одной и той же температуре и находятся в одинаковых средах. Получается, что в условиях Сибири разморозить мамонта нет никакой возможности, так как лето там слишком короткое.

**Р140.** Рассмотрим сначала состояние льда и давление в контейнере при  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Так как плотность насыщенного водяного пара равна  $0,5977\text{ }(\approx 0,6)\text{ кг/м}^{-3}$  и его давление 1 атм, то 0,6 кг льда полностью превращается в насыщенный пар при  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ , создавая давление 1 атм.

Как лед, находящийся вначале при температуре  $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$ , превращается в насыщенный водяной пар при  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ ? Если температура увеличивается очень медленно, система проходит через множество равновесных состояний. Сначала лед возгоняется, т.е. испаряется, и твердая фаза находится в равновесии со своим паром. Это продолжается до тех пор, пока не будут достигнуты температура и давление тройной точки ( $0,01\text{ }^{\circ}\text{C}$  и  $610\text{ Па}$ ). В тройной точке наряду со льдом и водяным паром появляется жидкое состояние. Дальнейшее нагревание заставляет твердую фазу исчезнуть, и в контейнере остаются только вода и насыщенный водяной пар. Интересно отметить, что впоследствии вода кипит устойчиво при температуре меньше  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ , пока вся вода не превращается в пар, так как давление внутри сосуда всегда меньше атмосферного.

С точки зрения поглощения тепла, важны только начальное и конечное состояния. Количество теплоты  $Q$ , поглощенное системой, не зависит от промежуточных состояний, поскольку система проходит через состояние лед – вода – пар с увеличением внутренней энергии. Для упрощения расчета весь процесс превращения 0,6 кг льда в горячую воду разделим на четыре стадии – нагревание льда, плавление льда, нагревание воды и кипение воды, что дает

$$Q = c_{\text{л}}m\Delta T_1 + \lambda_{\text{л}}m + c_{\text{в}}m\Delta T_2 + L_{\text{в}}m,$$

где  $c_{\text{л}} = 2,1\text{ кДж (кг} \cdot \text{К)}$  – удельная теплоемкость льда,  $\Delta T_1 = 10\text{ }^{\circ}\text{C}$ ,  $\lambda_{\text{л}} = 334\text{ кДж/кг}$  – удельная теплота плавления льда,  $c_{\text{в}} = 4,2\text{ кДж/(кг} \cdot \text{К)}$  – удельная теплоемкость воды,  $\Delta T_2 = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$ ,  $L_{\text{в}}$  – удельная теплота парообразования воды.

Удельные теплоемкости льда и воды слабо зависят от температуры и давления. Аналогично, удельная теплота плавления

льда также практически не зависит от давления. Однако ситуация становится иной для удельной теплоты парообразования воды – она слабо меняется с изменением температуры, но существенно зависит от давления.

Значение  $L_v = 2256$  кДж/кг, обычно указываемое в таблицах, учитывает не только более высокую внутреннюю энергию пара по сравнению с водой при температуре кипения, но также и работу, произведенную против атмосферного давления. В данной задаче эта работа была произведена, когда контейнер опорожнили, т.е. количество теплоты переданное системе, меньше на  $p_a \Delta V = 101,3$  кДж. Для 0,6 кг воды получаем

$$L_v^* = \left( 2256 - \frac{101,3}{0,6} \right) \text{кДж/кг} \approx 2090 \text{ кДж/кг}.$$

Для наших вычислений необходимо использовать это, более точное значение. После подстановки численных значений получаем

$$Q = 1720 \text{ кДж}.$$

Пренебрежение работой, произведенной против атмосферного давления, привело бы к ошибке почти на 6%, а игнорирование небольшой зависимостью других коэффициентов от температуры и давления приводит к погрешности приблизительно 1%. Главная причина этого в том, что в ходе преобразования вода – пар изменение в объеме является очень существенным. В то же время объемы воды и льда по сравнению с объемом пара незначительны, и ими обычно молча пренебрегают.

**Р141.** Вода будет испаряться в закрытом контейнере, пока пар в пространстве над водой не станет насыщенным. Полное давление над жидкостью является суммой давлений насыщенного пара и воздуха, находящегося в контейнере, т.е. оно всегда выше, чем давление одного пара. Это означает, что вода не может начать кипеть при любой температуре.

Если контейнер достаточно прочный, он может противостоять большому повышению температуры. До какой же температуры жидкая вода все еще могла бы находиться в контейнере? Таблицы данных для насыщенного водяного пара показывают нам, что критическая температура воды равна  $374,2$  °C, а ее критическая плотность составляет  $326,2 \text{ кг/м}^3$ . Это означает, что вся вода не может испариться прежде, чем будет достигнута критическая точка C (рис.222). Иначе плотность воды в контейнере должна была бы быть около  $500 \text{ кг м}^3$ . Действи-

тельно, странное изменение состояния происходит при более низких температурах! Плотность воды равна  $500 \text{ кг м}^3$  приблизительно при  $365^\circ\text{C}$ , а плотность насыщенного пара при этой температуре равна  $160 \text{ кг м}^3$ . Это означает, что при  $365^\circ\text{C}$  жидкая вода заполняет весь контейнер. Объясняется это тем, что в этом диапазоне температур плотность воды уменьшается быстрее, чем увеличивается плотность водяного пара.

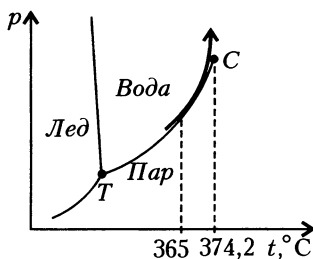


Рис. 222

При температурах более  $365^\circ\text{C}$  вода в контейнере остается в жидком состоянии, но ее давление увеличивается. Как показано на рисунке, система уходит от кривой кипения и продолжается над ней, в области фазовой диаграммы, соответствующей жидкой фазе. Термины «жидкость» и «пар» теряют свое значение выше критической температуры; строгое применение терминологии подразумевало бы, что вода находится в газообразном состоянии.

А что происходит с воздухом в контейнере? При соответствующем температурном диапазоне  $360\text{--}380^\circ\text{C}$  его давление составляет около  $200\text{--}300 \text{ атм}$ . При таком давлении часть воздуха растворена в воде, а остальная часть сжата в очень маленькие пузырьки, заполняющие только  $0,1\text{--}0,2\%$  объема контейнера. Таким образом, воздух не оказывает никакого значимого воздействия на состояние воды.

**Р142.** При решении задачи необходимо учитывать только энергию молекул воздуха, поэтому температура  $T$  появляется в комбинации  $kT$ . Анализ размерностей, использующий длину  $l$ , силу  $F$ , массу  $m$  и комбинацию  $kT$ , показывает, что амплитуда должна зависеть от этих переменных таким образом:

$$\left(\frac{kT}{F}\right)^q l^{1-q},$$

где  $q$  может иметь любое значение. Видно, что масса  $m$  здесь не присутствует, так что от массы паутины амплитуда колебаний не зависит и одинакова для обеих паутинок.

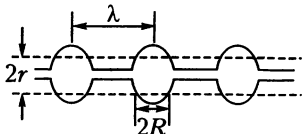
**Р143.** Сравним поверхностную энергию цилиндрической водяной нити на паутине с энергией цепочки периодически расположенных капель воды, на которые разбивается цилиндрическая нить. Обозначим начальный радиус водяной нити  $r$ ,

расстояние между каплями (длину волны)  $\lambda$ , а радиус капле  $R$ , как показано на рисунке 223.

Для цилиндрической водяной нити длиной  $L$  поверхностная энергия  $E_1$  равна

$$E_1 = 2\pi\sigma rL,$$

где  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения воды. Система из  $n = L/\lambda$  одинаковых капель имеет поверхностную энергию  $E_2$ , равную



$$E_2 = \frac{4\pi\sigma R^2 L}{\lambda},$$

Рис. 223

поскольку мы пренебрегли толщиной и площадью поверхности самой нити паутины. Считая, что в обоих случаях количество воды одно и то же, можем записать

$$\pi r^2 L = \frac{4\pi R^3}{3} \frac{L}{\lambda}.$$

В процессе формирования сферических капель поверхностная энергия должна уменьшиться, следовательно,  $E_2 < E_1$ . Исключая  $R$  из этих уравнений, мы получаем

$$\lambda > \frac{9r}{2}.$$

Этот результат показывает, что «длина волны» распределения капель должна быть больше, чем некоторое критическое значение  $\lambda_{\text{крит}}$ , которое является пропорциональным начальному радиусу водяной нити.

**Примечания.** а) Бельгийский физик Ж.Плато (1801–1883), исследуя сжатие водяной нити, вызванной поверхностным натяжением, первым доказал, что критическая «длина волны» больше, чем приведенная выше. Он предполагал периодическое изменение в диаметре нити и рассмотрел эффект добавочного давления, связанного с кривизной поверхности жидкости. По его расчетам,  $\lambda_{\text{крит}} = 2\pi r$ .

б) Нобелевский лауреат, английский физик Дж.Рэлей (1842–1919) исследовал стабильность водяной нити. Согласно его очень осторожным и детальным вычислениям по формированию капель, наивероятнейшая «длина волны» равна  $\lambda_{\text{наиб}} = 9,02r$ .

**Р144.** а) Вначале частицы, движущиеся справа и упруго отскакивающие рикошетом, передают телу больший импульс, чем те, которые неупруго сталкиваются с ним слева. По этой

причине результирующая сила, действующая влево, ускоряет тело. Чем быстрее тело перемещается влево, тем меньше относительная скорость, с которой сталкиваются с ним частицы справа. Для тех же частиц, которые движутся слева, справедливо обратное утверждение. Таким образом, результирующая сила, действующая на тело, уменьшается со временем.

По истечении достаточно большого времени тело начинает двигаться с постоянной скоростью  $v_1$ . Условие такого «равновесия» состоит в том, что за единицу времени частицы передают телу один и тот же импульс как справа, так и слева.

Частицы справа достигают тела с относительной скоростью  $v_0 - v_1$  и отскакивают рикошетом с той же самой по величине относительной скоростью. За короткий временной интервал  $\Delta t$  частицы, находящиеся в пределах расстояния  $(v_0 - v_1)\Delta t$ , достигают цилиндра, и каждая передает ему импульс, пропорциональный  $2(v_0 - v_1)$ . Таким образом, сила, действующая на тело справа, пропорциональна  $2(v_0 - v_1)^2$ . Точно так же частицы, неупруго сталкивающиеся с телом слева и движущиеся с относительной скоростью  $(v_0 + v_1)$ , создают силу, пропорциональную  $(v_0 + v_1)^2$ . Условие для определения постоянной скорости имеет вид

$$2(v_0 - v_1)^2 = (v_0 + v_1)^2,$$

откуда

$$v_1 = v_0 \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \approx 0,17v_0.$$

б) Предположим, что сталкивающиеся частицы – это молекулы газа при некоторой температуре. Если тело продолжает двигаться равномерно в течение очень большого времени, то можно подумать, что мы получили вечный двигатель второго рода, т.е. что создан тепловой двигатель, который непрерывно извлекает энергию из отдельного теплового резервуара. Весь накопленный опыт указывает, что такой двигатель не может быть создан.

Где же ошибка в вышеприведенном рассуждении? Оказывается, не было принято во внимание тепло, выделяющееся при неупругих столкновениях! Частицы, неупруго бомбардирующие левую стенку цилиндра, нагревают его. Если это тепло непрерывно отводится, т.е. тело охлаждается, то движение, описанное в части а), непрерывное. Результат естественный: тепловой двигатель работает между двумя тепловыми резервуарами – газом бомбардирующих частиц и охлаждающей средой.

Однако если тело не охлаждается, то рано или поздно оно нагреется. Молекулы цилиндра со стороны каждой его стенки колеблются со средней скоростью, соответствующей ее температуре, и частицы газа отскакивают от нее иногда при большей скорости, а иногда при меньшей — по сравнению с той, с какой они отскакивали бы от более холодного тела. Но в конце концов цилиндр не сможет больше поглощать тепло от газа с обеих сторон (иначе он нагрелся бы). В этом случае столкновения оказываются одинаково эффективными на обоих торцах цилиндра, и силы с обеих сторон становятся одинаковыми.

Таким образом, спустя очень длительное время, когда тепловое равновесие будет достигнуто, тело должно остановиться.

**Р145.** Поскольку космический зонд очень далек от Солнечной системы, мы можем пренебречь солнечной и космической фоновой радиацией. Без каких-либо экранов защиты поток тепла  $I$ , выделенного источником ядерной энергии, излучается с поверхности космического зонда согласно закону Стефана–Больцмана:

$$I = \sigma ST^4,$$

где  $\sigma$  — постоянная Стефана–Больцмана,  $S$  — площадь поверхности космического зонда,  $T$  — температура его поверхности.

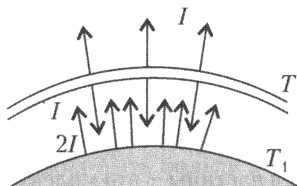


Рис. 224

Если космический зонд окружить тонким защитным экраном, то у внешней поверхности экрана происходит тот же самый процесс излучения, и тогда температура экрана должна быть  $T$ . Но в состоянии равновесия экран излучает в космос всю энергию, которую получает от зонда (рис.224). Это означает, что поверхность зонда излучает энергию  $2I$ , а его новая температура  $T_1$  такова, что

$$2I = \sigma ST_1^4.$$

Таким образом,

$$T_1 = \sqrt[4]{2} T \approx 1,19 T.$$

Если использовать  $N$  экранов защиты с такой же площадью поверхности, то спутник должен излучать энергию  $(N + 1) I$ , так что его температура будет

$$T_N = \sqrt[4]{N + 1} T.$$

*Примечание.* Если не пренебрегать разностью площадей экранов, то для большого количества экранов формула становится более громоздкой.

**Р146.** Если при абсолютной температуре  $T$  тело поглощает количество теплоты  $\Delta Q$ , то при этом происходит изменение энтропии  $\Delta S \geq \Delta Q/T$ . Равенство в этом выражении соблюдается только для обратимых процессов.

Пусть  $\Delta T_1$  и  $\Delta T_2$  обозначают малые изменения температуры тел, находящихся при температурах  $T_1$  и  $T_2$  соответственно, в результате получения количеств теплоты  $\Delta Q_1$  и  $\Delta Q_2$  в обратимом процессе. Изменение энтропии целой системы описывается выражением

$$\Delta S_1 + \Delta S_2 = \frac{\Delta Q_1}{T_1} + \frac{\Delta Q_2}{T_2} \geq 0.$$

Это выражение можно преобразовать к виду

$$\Delta Q_1 T_2 + \Delta Q_2 T_1 \geq 0.$$

Отношение полученного количества теплоты к изменению температуры одинаково для обоих тел, так как их массы равны. Поэтому предыдущее выражение можно записать так:

$$T_2 \Delta T_1 + T_1 \Delta T_2 = \Delta(T_1 T_2) \geq 0.$$

Это означает, что геометрическое среднее температур наших двух тел в течение процесса уменьшаться не может (хотя оно может увеличиваться).

Полученные отношения справедливы во время всего процесса, следовательно, для начального и конечного состояний тоже, т.е. конечная температура должна быть по крайней мере равна  $\sqrt{T_1 T_2}$ . Если бы из системы энергия не выводилась, то конечная температура была бы средним арифметическим двух начальных температур. Таким образом, максимальная энергия, которую можно получить от системы, равна

$$\left( \frac{T_1 + T_2}{2} - \sqrt{T_1 T_2} \right) mc,$$

где  $m$  — полная масса воды,  $c$  — ее удельная теплоемкость.

**Р147.** Как в классической, так и в квантовой механике число микросостояний  $W$ , которые может иметь система из  $N$  объектов, занимающих ограниченное пространство объемом  $V$ , пропорционально  $V^N$ . В нашем случае сначала  $2N_A$  молекул гелия, где  $N_A$  — постоянная Авогадро, и  $3N$  молекул кислорода изолированы друг от друга и занимают объемы  $2V_0$  и  $3V_0$  соответственно

( $V_0 \approx 0,0224 \text{ м}^3$ ). После того как перегородку удалили,  $5N_A$  молекул, заняли объем  $5V_0$ . Тогда отношение нового числа микросостояний к числу микросостояний, которое было прежде, будет равно

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{(5V_0)^{2N_A} (5V_0)^{3N_A}}{(2V_0)^{2N_A} (3V_0)^{3N_A}} = \frac{(5V_0)^{5N_A}}{(2V_0)^{2N_A} (3V_0)^{3N_A}}.$$

Таким образом, изменение энтропии равно,

$$\Delta S = k \ln \frac{W_2}{W_1} = kN_A (5 \ln 5 - 2 \ln 2 - 3 \ln 3) = 27,9 \text{ Дж/К}$$

(здесь  $k$  – постоянная Больцмана).

*Примечание.* Если бы мы исследовали смешивание двух одинаковых газов (например, два моля гелия с тремя молями гелия) при нормальных температурах и давлении, то расчетное изменение энтропии, казалось бы, было бы тем же самым. Однако, очевидно, что не может быть никакого изменения в энтропии, потому что с газами физически ничего не происходит. Это называется парадоксом Гиббса. Разрешение этого парадокса связано с неразличимостью тождественных частиц.

**Р148.** Рассмотрим работу поршня насоса для накачки воздуха в двух стадиях (рис.225). Первая стадия – обе заслонки закры-

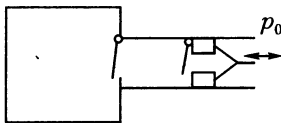


Рис. 225

ты, и поршень изотермически сжимает воздух. Когда давление в насосе сравнивается с давлением в баллоне, внутренний клапан открывается, и теперь изотермически сжимается общий объем воздуха. Момент, когда внутренний клапан открывается, происходит все

позже и позже, что делает вычисление полной произведенной работы довольно сложным. К счастью, имеется более простой метод.

Определим количество воздуха в баллоне в конце процесса. Пусть сначала в нем находилось 10 литров воздуха при атмосферном давлении, а в конце процесса количество его увеличилось в 9 раз (90 литров при атмосферном давлении).

Согласно первому закону термодинамики, сумма работы  $A$ , произведенной над воздухом, и количества теплоты  $Q$ , переданного ему, равна увеличению внутренней энергии воздуха. В данной ситуации температура воздуха не изменяется, и поэтому его внутренняя энергия остается неизменной. Таким образом,  $A + Q = 0$ , т.е. работа, произведенная над воздухом, равна количеству теплоты ( $-Q$ ), которое воздух отдает.



Для обратимого процесса при постоянной температуре  $T$  верно равенство  $\Delta S = \Delta Q/T$ . Попробуем определить тепло, отдаваемое воздухом, и произведенную работу при помощи изменения энтропии  $S$  воздуха.

Если  $N$  молекул сжаты в объеме, в 10 раз меньшем того, который они первоначально занимали, то число возможных микросостояний составляет  $1/10^N$  от их первоначального числа. Согласно статистической интерпретации энтропии, изменение энтропии газа равно натуральному логарифму этого числа, умноженного на постоянную Больцмана  $k$ :

$$\Delta S = k \ln \frac{1}{10^N} = -Nk \ln 10.$$

Отсюда следует выражение для количества теплоты, отдаваемого газом:

$$\Delta Q = T \Delta S = -NkT \ln 10 = -nRT \ln 10 = -10p_0V_0 \ln 10.$$

Таким образом, произведенная работа равна

$$A = -\Delta Q = 10 \cdot 10^5 \text{ Па} \cdot 10^{-2} \text{ м}^3 \cdot \ln 10 \approx 23 \text{ кДж}.$$

**P149.** Между Землей и отдаленной планетой должно существовать внешнее электрическое поле, так как между ними имеется разность потенциалов. Это поле приводит к разделению зарядов в металлическом корпусе космического корабля, так что электрическое поле внутри космического корабля отсутствует (эффект клетки Фарадея).

Разность потенциалов между космическим кораблем и планетой изменяется в ходе полета. Для оценки положим, что она пропорциональна расстоянию от планеты. Тогда разность потенциалов велика в начале полета, но затем медленно уменьшается и становится нулевой в конце. Таким образом, когда космический корабль «приземляется» на планету, его электрический потенциал точно равен потенциалу планеты, и астронавты могут выйти без всяких опасений.

**P150.** Энергия конденсатора емкостью  $C$ , несущего заряд  $Q$ , равна  $Q^2/(2C)$ . По изменению энергии конденсатора можно рассчитать и изменение его емкости.

Энергия конденсатора больше, когда он сжат, так как поверхностные заряды при сдвливании были перемещены в направлении, противоположном направлению сил их взаимного отталкивания. Если поверхность конденсатора изменена немного, то электрическое поле около поверхности можно считать таким же, как первоначальное. Таким образом, изменение энергии полно-

стью зависит от изменения объема, а не от фактической формы углубления.

Предположим, что конденсатор сдавливают так, что его объем уменьшается на 3%, но его форма остается сферической. Его радиус, таким образом, уменьшается на 1% (поскольку объем сферы пропорционален кубу ее радиуса). Отношение энергии такого уменьшенного сферического конденсатора к энергии первоначальной сферы такое же, как и отношение энергии вдавненного конденсатора к энергии первоначального. Следовательно, относительные изменения их емкостей тоже те же самые.

Наконец, емкость сферического конденсатора пропорциональна его радиусу. Поэтому емкость уменьшенного конденсатора на 1% меньше, а значит, и емкость вдавненного конденсатора тоже должна уменьшиться на 1%.

**Р151.** Пусть на уединенной поверхности  $S$  заряд  $Q$  занимает равновесную конфигурацию  $K$ , а на уединенной поверхности  $S^*$  тот же заряд  $Q$  занимает равновесную конфигурацию  $K^*$ . Продемонстрируем применимость принципа суперпозиции (независимости электрических полей) для решения задачи.

Рассмотрим систему, состоящую из двух поверхностей  $S$  и  $S^*$  ( $S^*$  – внутри, как указано в условии), со «специально приготовленным» распределением зарядов на них. На поверхности  $S$  одновременно находятся заряды  $Q$  и  $-Q$  (один поверх другого) в конфигурации  $K$ , а на поверхности  $S^*$  находится заряд  $Q$  в его равновесной конфигурации  $K^*$ . Энергия системы равна, с одной стороны,  $W = \frac{Q^2}{2C^*}$ , где  $C^*$  – электрическая емкость поверхности  $S^*$ . С другой стороны, энергию системы зарядов  $Q$ ,  $-Q$  и  $Q$  можно представить как сумму двух независимых (по принципу суперпозиции) слагаемых:  $W = \frac{Q^2}{2C} + \Delta W$ , где  $C$  – емкость поверхности  $S$ , а  $\Delta W$  – это энергия, по величине либо большая, либо равная энергии конденсатора с зарядом  $Q$  и обкладками площадью  $S$  и  $S^*$ . Поскольку

$$\frac{Q^2}{2C} < \frac{Q^2}{2C^*}, \text{ то } C > C^*,$$

т.е. емкость поверхности  $S^*$  меньше емкости  $C$  поверхности  $S$ .

**Р152.** Емкость  $C$  плоского конденсатора с площадью пластин  $S$  определяется по формуле

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}.$$

Энергию конденсатора, подсоединенного к батарее с напряжением  $U$ , можно выразить так:

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\epsilon_0 SU^2}{2d}.$$

Если при постоянном напряжении расстояние между пластинами увеличивается от  $d$  до  $2d$ , то емкость и энергия конденсатора уменьшаются до половины их первоначальных значений. Может быть, это неожиданный результат, так как раздвигание пластин конденсатора требует положительной внешней работы и, казалось бы, энергия конденсатора должна увеличиться. Однако, когда заряд  $\Delta Q$  уходит с пластин конденсатора, он увеличивает энергию батареи (заряжает батарею) на величину  $\Delta QU$ . Так как  $\Delta Q = \Delta CU$ , увеличение энергии батареи ровно в два раза больше уменьшения энергии конденсатора. Увеличение энергии батареи происходит наполовину за счет уменьшения энергии конденсатора и наполовину за счет работы, произведенной по отталкиванию пластин.

*Примечание.* Вышеупомянутое заявление можно проверить прямым вычислением внешней работы, произведенной по отталкиванию пластин. Сила притяжения, действующая между пластинами плоского конденсатора, равна  $F = Q^2 (2\epsilon_0 S)$ . Выражая заряд через напряжение и емкость, приходим к выражению

$$F = \frac{C^2 U^2}{2\epsilon_0 S} = \frac{\epsilon_0 S U^2}{2d^2}.$$

Если расстояние между пластинами в произвольный момент времени обозначить через  $x$ , то произведенную работу можно рассчитать при помощи интегрирования в пределах от  $d$  до  $2d$ :

$$A = \int F(x) dx = \frac{\epsilon_0 S U^2}{2} \int \frac{1}{x^2} dx = \frac{\epsilon_0 S U^2}{4d}.$$

Так что внешняя работа, произведенная по отталкиванию пластин, равна уменьшению энергии конденсатора, а в сумме они дают увеличение энергии батареи.

**Р153.** Вообразите, что ток  $I_0$  течет в сверхпроводящей замкнутой накоротко пружине с  $N$  витками, с поперечным сечением  $S = \pi R^2$  и длиной  $x_0$ . Тогда индукция магнитного поля внутри пружины определяется по формуле  $B = \mu_0 I_0 N / x_0$ . Полный магнитный поток через сечение пружины равен

$$\Phi = BSN = \frac{\mu_0 I_0 N^2 S}{x_0}.$$

Всякое изменение параметров в правой части последнего выражения может происходить только таким образом, чтобы комбинация их оставалась постоянной, так как магнитный поток в нашем опыте не должен изменяться никогда для сверхпроводника и в первый момент времени – для обычных проводников. Таким образом, ток должен изменяться с изменением длины  $x$  как  $I(x) = I_0 x / x_0$ . Индуктивность  $L$  пружины длиной  $x$  равна  $L(x) = \mu_0 N^2 S / x$ , а магнитная энергия  $W_m$  пружины с током  $I$ , текущим через нее, равна

$$W_m = \frac{LI^2}{2} = \frac{\mu_0 I_0^2 N^2 S x}{2x_0}.$$

Получается, что энергия  $W_m$  пружины пропорциональна  $x$ , т.е.  $W_m(x) \sim x$ . Постоянная пропорциональности – это сила магнитного притяжения витков пружины  $F_0$ , так что ее можно представить в виде  $F_0 = W_m / x$ .

Пружина находится в равновесии, когда магнитная сила притяжения уравнивает упругую силу отталкивания  $F_y(x) = k(x_0 - x)$ , т.е. когда изменение длины  $\Delta x$  пружины равно

$$\Delta x = x_0 - x = \frac{F_y}{k} = \frac{\pi \mu_0 I_0^2 N^2 R^2}{2kx_0^2}.$$

**Р154.** а) Горизонтальная сила  $F(x)$  (измеренная в направлении увеличения  $x$ , т.е. налево на рисунке 67 в условии задачи), действующая на магнит, равна

$$F(x) = -\frac{K}{x^n} + \frac{mg(d + s - x)}{l},$$

где  $(d + s)$  – расстояние магнита  $A$  от магнита  $B$  в начальный момент времени. Условие равновесия записывается в виде

$$F(x)|_{x=d} = 0.$$

Устойчивость равновесия зависит от поведения функции  $F(x)$  в окрестности точки  $x = d$ . Функция может монотонно увеличиваться или уменьшаться. Для устойчивого равновесия производная функции должна быть отрицательной. В неустойчивом случае производная положительна, а в случае нейтрального равновесия она является нулевой, т.е.  $F'(x)|_{x=d} = 0$ . При использовании выражения для силы  $F(x)$  последнее выражение можно записать в виде

$$\frac{nK}{d^{n+1}} - \frac{mg}{l} = 0,$$

а условие равновесия – в виде

$$-\frac{K}{d^n} + \frac{mgs}{l} = 0.$$

Из этих уравнений получаем

$$n = \frac{d}{s} = 4 \text{ и } K = \frac{mgd^4s}{l}.$$

б) В вертикальной трубке (рис.226) сила, действующая на магнит А, равна

$$F(x) = +\frac{K}{x^4} - mg.$$

Равновесное «парение» происходит с магнитами на расстоянии  $h$  друг от друга, когда  $F(x)|_{x=h} = 0$ .

Принимая во внимание результат для  $K$ , полученный в пункте а), находим

$$h = \left(\frac{K}{mg}\right)^{1/4} = d\left(\frac{s}{l}\right)^{1/4} = 4\left(\frac{1}{100}\right)^{1/4} \text{ см} \approx 1,3 \text{ см}.$$

**Р155.** Энергия, в конечном счете запасенная в конденсаторе, равна  $C(N\varepsilon)^2/2$  в обоих случаях. Прямое подключение к батарее приводит к потере энергии, равной энергии конденсатора, поскольку работа батареи в этом случае равна  $(CN\varepsilon)(N\varepsilon) = C(N\varepsilon)^2$ . При зарядке стадиями полная работа, произведенная батареей, равна

$$\Delta Q \Sigma(\Delta U) = (C\varepsilon)(\varepsilon + 2\varepsilon + 3\varepsilon + \dots + N\varepsilon) = \frac{1}{2}C\varepsilon^2 N(N+1).$$

Таким образом, потерянная энергия в этом случае составляет

$$\frac{1}{2}C\varepsilon^2(N(N+1) - N^2) = \frac{1}{2}C\varepsilon^2 N,$$

т.е. только  $1/N$  от первоначальной потери.

*Примечание.* Вы можете получить тот же самый результат, рассматривая график, приведенный на рисунке 227. Треугольник  $OAB$  представляет энергию конденсатора, а треугольник  $OAD$  соответствует энергии, потраченной на зарядку конденсатора за одну стадию. Маленькие заштрихованные треугольники показывают энергию, потрачен-

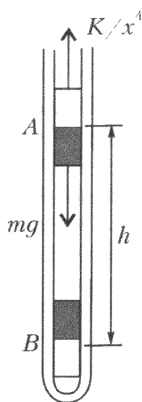


Рис. 226

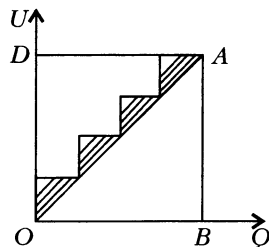


Рис. 227

ную при использовании кратного числа (например,  $N = 4$ ) ступеней. Полная площадь заштрихованных треугольников равна  $1/N$  площади треугольника  $OAD$ .

**Р156.** Запасенная в конденсаторе энергия равна  $Q^2/(2C)$  в обоих случаях, а емкости конденсаторов с диэлектриком  $C_\epsilon$  и без него  $C_0$  связаны соотношением  $C_\epsilon = \epsilon C_0$ . Таким образом, если масло вылить, то энергия увеличивается в  $\epsilon$  раз. Хитрость в том, что масло, как всякий диэлектрик, всегда втягивается туда, где поле сильнее. Поэтому должна быть произведена работа, чтобы извлечь его оттуда.

**Р157.** а) Пусть  $d$  – расстояние между пластинами конденсатора,  $S$  – площадь и  $l$  – длина пластины конденсатора,  $Q$  – заряд конденсатора. Рассмотрим ситуацию, когда длина  $x$  диэлектрической пластины уже была вставлена между пластинами конденсатора, как показано на рисунке 228.

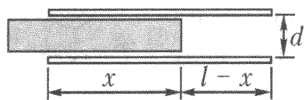


Рис. 228

Емкость плоского конденсатора в этом случае можно рассчитать как емкость двух конденсаторов, включенных параллельно, один из которых заполнен диэлектриком, а другой – пустой:

$$C = \epsilon_0 \epsilon \frac{S}{d} \frac{x}{l} + \epsilon_0 \frac{S}{d} \frac{l-x}{l} = \epsilon_0 \frac{S}{d} \frac{(\epsilon - 1)x + l}{l}.$$

Таким образом, полная емкость конденсатора линейно увеличивается от  $\epsilon_0 (S/d)$  до  $\epsilon_0 \epsilon (S/d)$  при изменении  $x$  от 0 до  $l$ . Так как заряд на пластинах не изменяется, то энергию конденсатора  $W$  разумно записать в виде

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 l d}{2\epsilon_0 S ((\epsilon - 1)x + l)}.$$

Ясно, что энергия конденсатора уменьшается с увеличением  $x$ . Это означает, что работа, произведенная при скольжении диэлектрической пластины, отрицательна, т.е. конденсатор втягивает пластину.

Величину втягивающей силы можно рассчитать, приравняв работу соответствующему изменению энергии ( $F \Delta x = \Delta W$ ) и продифференцировав выражение для  $W$ :

$$F = \frac{dW}{dx} = - \frac{(\epsilon - 1) Q^2 l d}{2\epsilon_0 S ((\epsilon - 1)x + l)^2}.$$

Самая большая сила реализуется при  $x = 0$ , а при  $x = l$  величина силы уменьшается в  $\epsilon^2$  раз.

*Примечание.* Как именно электрическое поле втягивает диэлектрик, параллельный пластинам конденсатора? Если электрическое поле между пластинами было однородным и перпендикулярным пластинам и нулевым вне конденсатора (т.е. как обычно), то никакая сила не могла действовать на диэлектрическую пластину. Явление втягивания объясняется кривизной электрического поля, которая неизбежно присутствует на краях пластин конденсатора.

б) Предыдущий результат был бы верен в случае постоянного напряжения, если бы не тот факт, что заряд на конденсаторе изменяется, в соответствии с формулой  $Q = CU$ , как только диэлектрическую пластину начинают вдвигать между пластинами конденсатора. Подстановка выражения для заряда (который зависит от  $x$ ) в формулу для силы дает

$$F = -\frac{\epsilon_0 S (\epsilon - 1) U^2}{2ld},$$

т.е. в этом случае сила, действующая на изолированную пластину, постоянна.

Интересное заключение можно сделать из выражения для энергии конденсатора при постоянном напряжении:

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\epsilon_0 S U^2 ((\epsilon - 1)x + l)}{2ld}.$$

Формула показывает, что в этом случае энергия конденсатора увеличивается линейно с  $x$  и что отношение изменения энергии  $\Delta W$  к небольшому смещению  $\Delta x$  изолированной пластины равно

$$\frac{\Delta W}{\Delta x} = \frac{\epsilon_0 S U^2 (\epsilon - 1)}{2ld}.$$

С точностью до знака, эта формула точно такая же, как и формула для силы.

Таким образом, когда диэлектрик вдвигают между пластинами, система работает над ним, т.е. втягивает его, в то время как энергия конденсатора увеличивается. Это возможно, потому что батарея, поддерживающая напряжение конденсатора постоянным, совершает работу. Дело в том, что емкость конденсатора (и его заряд) увеличивается, батарея должна подать на пластины конденсатора дополнительный заряд. Вычисление работы, произведенной батареей, предоставляется читателям.

**P158.** Расставим токи в резисторах, начиная с последнего элемента в цепочке (рис.229). Так как ток  $1\text{ A}$  течет через первый резистор, такой же ток должен течь и через второй, таким

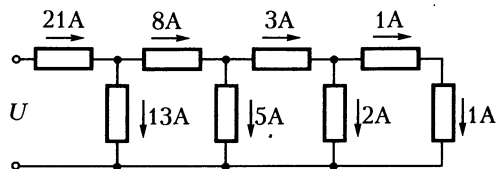


Рис. 229

образом, разность потенциалов на каждом из этих резисторов  $1\text{ В}$ . Как следствие, разность потенциалов на третьем резисторе равна  $1\text{ В} + 1\text{ В} = 2\text{ В}$ , и ток, текущий через него, должен быть  $2\text{ А}$ . Ток, текущий через следующий резистор, равен  $1\text{ А} + 2\text{ А} = 3\text{ А}$ . Ток в пятом резисторе можно определить, используя разность потенциалов  $2\text{ В} + 3\text{ В} = 5\text{ В}$  на резисторах с токами  $2\text{ А}$  и  $3\text{ А}$ , и т.д., как показано на рисунке.

Легко видеть, что наша цепочка резисторов построена, начиная с последнего элемента, подсоединением элементов поочередно последовательно и параллельно. Сумма токов, текущих через два предыдущих резистора, течет через следующий резистор ряда – первый закон Кирхгофа. Следующий элемент, подключенный параллельно, создает новый электрический контур в цепочке, и поэтому разность потенциалов на этом резисторе равна сумме разностей потенциалов на двух предыдущих – второй закон Кирхгофа. Таким образом, в этой так называемой лестничной схеме законы Кирхгофа позволяют определить токи и напряжения для каждого резистора.

Заметим, что числовые значения токов (или разностей потенциалов) – числа ряда Фибоначчи:  $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21$ . Разность потенциалов на двух последних резисторах равна  $21\text{ В} + 13\text{ В} = 34\text{ В}$  – это и есть разность потенциалов на входе схемы. Так как общий ток в цепи равен  $21\text{ А}$ , то эквивалентное сопротивление схемы будет  $34\text{ В} / 21\text{ А} = 1,61905\text{ Ом}$ .

Если, не изменяя входное напряжение  $34\text{ В}$ , подсоединить еще один элемент слева к цепи параллельно входу, тогда полный ток увеличивается до  $21\text{ А} + 34\text{ А} = 55\text{ А}$ . В этом случае эквивалентное сопротивление будет равно:  $34\text{ В} / 55\text{ А} = 0,61818\text{ Ом}$ . Если включить еще один элемент слева последовательно со схемой, то для обеспечения тока через него  $55\text{ А}$  напряжение на входе схемы необходимо увеличить до  $34\text{ В} +$



+ 55 В = 89 В. При этом полное сопротивление цепи будет равно 89 В/55 А = 1,61818 Ом.

Если лестничная схема расширяется далее и далее, получается бесконечная цепь. Эквивалентное сопротивление этой цепи можно рассчитать, используя тот факт, что добавление двух дополнительных элементов не изменяет ее сопротивления. Таким образом, целая цепочка может быть заменена одиночным резистором сопротивлением  $R$ , который является таким, что, если два

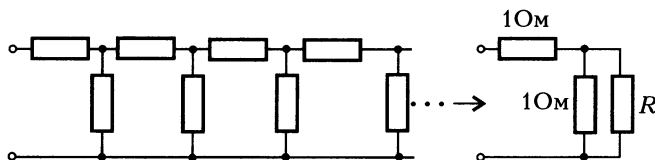


Рис. 230

резистора сопротивлением по 1 Ом каждый подсоединены к ней в комбинации один параллельно, а другой последовательно, эквивалентное сопротивление новой схемы будет также  $R$  (рис.230). Для этого необходимо выполнить условие

$$R = R_0 + \frac{1}{\left(\frac{1}{R_0}\right) + \left(\frac{1}{R}\right)}, \text{ где } R_0 = 1 \text{ Ом}.$$

Отсюда получаем квадратное уравнение для определения числового значения  $R$ :

$$R^2 - R - 1 = 0.$$

Положительный корень этого уравнения дает эквивалентное сопротивление для бесконечной цепочки:

$$R = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,61803 \text{ Ом}.$$

Мы видим, что эквивалентное сопротивление цепочки из восьми – десяти элементов очень близко к сопротивлению бесконечной цепочки. Следовательно, лестничная схема даже с относительно небольшим количеством элементов может рассматриваться как бесконечная.

*Примечания.* а) На практике нулевые провода открытых электрических сетей питания могут рассматриваться как лестничные цепи; нулевые провода привязаны к полюсам и заземлены, допустим, в каждом десятом полюсе. Такая лестничная схема состоит из двух типов резисторов, но эквивалентное сопротивление бесконечной цепочки можно рассчитать, используя рассмотренный метод.

6) Интересно заметить, что вышеупомянутое квадратное уравнение – это уравнение золотой пропорции, решение которого – золотое сечение:  $(1 + \sqrt{5})/2 = 1,61803 \dots$  Именно таким получается числовое значение эквивалентного сопротивления бесконечной лестничной схемы.

Наконец, ради эстетического удовольствия, производимого дробями с множественным уровнем, стоит выразить эквивалентное сопротивление бесконечной цепочки, составленной из резисторов сопротивлением 1 Ом. На сей раз элементы рассматриваются по порядку, но не с конца, а с начала, т.е. начиная с левого конца цепочки:

$$R = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}.$$

Если в конце формулы точки (...) заменить на 1, то получим эквивалентное сопротивление первоначальной цепочки из восьми элементов.

**Р159.** Сначала мы рассмотрим сетку резисторов. Возьмем точку сетки – узел, в которую ток  $I$  входит и затем растекается до бесконечности. В силу симметрии, одинаковые токи величиной  $I/4$  растекаются из этой точки по четырем возможным направлениям, как показано на рисунке 231.

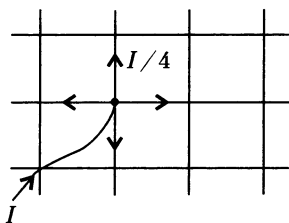


Рис. 231

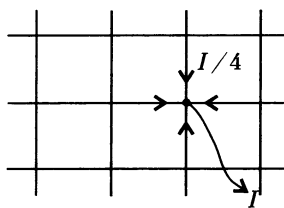


Рис. 232

Затем возьмем (независимо от предыдущего рассуждения) соседнюю точку сетки – соседний узел, и пусть ток  $I$  вытекает из нее. Снова видим, что одинаковые токи величиной  $I/4$  притекают к узлу по четырем одинаковым сходящимся в узле резисторам (рис. 232).

Теперь рассмотрим суперпозицию этих двух случаев. Из-за

линейности уравнений схемы скалярные величины, например токи и разности потенциалов, просто складываются. Токи, текущие в произвольном месте сетки, определить сложно, но ток, текущий между нашими двумя соседними точками, определить легко. В этом резисторе суммируются те два тока, которые рассмотрены выше, т.е. через него течет полный ток  $I/2$  (рис.233). Но если ток  $I/2$  течет через сопротивление  $R$ , тогда на нем появляется разность потенциалов (напряжение)  $U = RI/2$ . Эквивалентное сопротивление между двумя соседними точками сетки поэтому равно

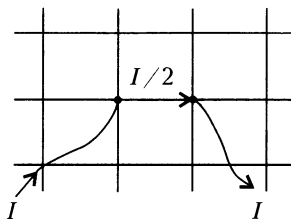


Рис. 233

$$R_3 = \frac{U}{I} = \frac{R}{2}.$$

Эквивалентные значения емкостей и индуктивностей для бесконечных сеток конденсаторов и катушек индуктивности можно рассчитать подобным образом, и мы получим

$$C_3 = 2C \text{ и } L_3 = \frac{L}{2}.$$

**Р160.** Применим принцип суперпозиции для решения задачи. Пусть  $c$  – число вершин, т.е. узлов, многогранника,  $n$  – число его ребер, встречающихся в узле (например, в случае додекаэдра, двенадцатигранника,  $c = 20$  и  $n = 3$ ). Если ток  $1$  А втекает в один узел и из всех других узлов вытекают токи по  $1/(c-1)$  А, то, в силу симметрии, на входе в нашу сеть ток растекается по  $n$  резисторам, откуда ток в одном из них, в том числе и в нашем, будет равен  $1/n$  А.

Наложим на предыдущее распределение токов такое (независимое) распределение, когда из соседнего узла вытекает ток  $1$  А. Это возможно тогда, когда во все другие узлы будут втекать токи по  $1/(c-1)$  А, включая и первоначальный узел. Опять-таки из соображений симметрии видим, что через наш резистор течет ток  $2/n$  А, т.е. ток в нем увеличился еще на  $1/n$  А. Так как сопротивление нашего резистора равно  $1$  Ом, то напряжение на этом резисторе равно  $U = 2/n$  В. Поскольку суммарный ток, текущий через всю нашу цепь, равен  $I_\Sigma = 1 \text{ А} + 1/(c-1) \text{ А} = c/(c-1) \text{ А}$ , то эквивалентное сопротивление будет равно

$$R_3 = \frac{U}{I_\Sigma} = \frac{2/n \text{ В}}{c/(c-1) \text{ А}} = \frac{2(c-1)}{nc} \text{ Ом}.$$

Так, для додекаэдра  $R_3 = 19/30$  Ом, для куба  $R_3 = 7/12$  Ом. Подобным образом можно найти сопротивление любой симметричной сетки резисторов.

**P161.** Обозначим эквивалентные сопротивления первоначальной сетки  $R_3$  и усеченной схемы  $r_3$ , а сопротивление удаленного резистора  $R$ . Мы можем рассматривать первоначальную сетку как схему из двух резисторов, включенных параллельно. Тогда просто составить уравнение, которое содержит  $r_3$ , а именно:

$$\frac{1}{R_3} = \frac{1}{r_3} + \frac{1}{R}.$$

Отсюда легко получаем искомое сопротивление  $r_3$  усеченной схемы:

$$r_3 = \frac{R_3 R}{R - R_3}.$$

Например, в случае бесконечной двумерной квадратной сетки эквивалентное сопротивление  $R_3$  между двумя соседними точками равно  $R/2$ . Из этого следует, что эквивалентное сопротивление  $r_3$  усеченной схемы равно  $R$ .

**P162.** Снова используем принцип суперпозиции, чтобы объединить отдельные рассмотрения втекающего и вытекающего токов. Пусть  $A$  обозначает вершину квадрата, где входит ток  $I_0$ ,  $B$  – соседнюю вершину, где он выходит, а разность потенциалов  $U$  измеряется между двумя другими вершинами квадрата  $C$  и  $D$ , как показано на рисунке 234.

Если ток  $I_0$  втекает в точке  $A$  и течет по направлению к точкам с нулевым потенциалом бесконечно далеко, то он растекается сферически симметрично в проводящем полупространстве, т.е. на расстоянии  $r$  от точки  $A$  плотность тока равна

$$j(r) = \frac{I_0}{2\pi r^2}.$$

Заметим, что это соотношение неверно для очень маленьких значений  $r$ , т.е. когда  $r$  не намного больше размера электрода в точке  $A$ .

Воспользуемся законом Ома в дифференциальной форме, который выражает плотность тока  $j$  через напряженность элек-

трического поля  $E$  и удельное сопротивление среды  $\rho$  :

$$j(r) = \frac{E(r)}{\rho}.$$

Используя выражение для  $j(r)$ , определяем напряженность электрического поля в проводящем полупространстве:

$$E(r) = \frac{I_0 \rho}{2\pi r^2}.$$

Потенциал (и, следовательно, разность потенциалов) можно определить из выражения для напряженности электрического поля интегрированием. Но мы попробуем получить результат при помощи простой аналогии.

Напряженность электрического поля точечного заряда  $q$  обратно пропорциональна  $r^2$ , его потенциал обратно пропорционален  $r$ , и коэффициент пропорциональности тот же самый в обоих случаях ( $E = kq/r^2$  и  $\varphi = kq/r$  соответственно). Это означает, что потенциал  $\varphi(r)$ , соответствующий напряженности электрического поля, определенной выше, будет

$$\varphi(r) = \frac{I_0 \rho}{2\pi r}.$$

Чем ближе точка к электроду, через который втекает ток, тем выше его потенциал. Так, потенциал точки  $D$ , равный  $\varphi_D = I_0 \rho / (2\pi a)$ , выше, чем потенциал точки  $C$ , равный  $\varphi_C = I_0 \rho / (2\sqrt{2}\pi a)$ . Разность потенциалов между двумя точками  $D$  и  $C$  равна

$$\varphi_D - \varphi_C = \frac{I_0 \rho (2 - \sqrt{2})}{4\pi a}.$$

Теперь обсудим вытекание из полупространства тока  $I_0$  в точке  $B$ . Все то же самое, как и в предыдущем случае, за исключением того, что знаки величин (тока, плотности тока, напряженности электрического поля и потенциала) изменены на обратные. Так, потенциал при исследовании в этом случае описывается функцией

$$\varphi(r) = -\frac{I_0 \rho}{2\pi r'},$$

где  $r'$  – расстояние от точки  $B$ . Потенциал точки  $C$  более низкий, чем потенциал точки  $D$ , т.е. точка  $D$  снова более положительная, чем точка  $C$ . Разность потенциалов между этими двумя точками та же самая, как и ранее.

Если рассмотреть наложение двух предыдущих случаев, то мы вернемся к нашей первоначальной задаче и получим, что разность потенциалов между точками  $C$  и  $D$  ровно вдвое больше любой из уже найденных разностей потенциалов, т.е.

$$U = \frac{I_0 \rho (2 - \sqrt{2})}{2\pi a}.$$

Кроме заданных величин, это выражение содержит искомое удельное сопротивление  $\rho$ . Поэтому решение задачи таково:

$$\rho = \frac{(2 + \sqrt{2})\pi a U}{I_0}.$$

*Примечание.* Этот метод широко используется в реальной жизни, например чтобы определить среднее удельное сопротивление какой-нибудь породы (скал, гор, опор и т.д.). Измерения, естественно, проводятся не на бесконечных полупространствах, а на объемах и плоскостях с линейными размерами намного больше, чем сторона  $a$  нашего квадрата.

**Р163.** Сначала соединим батарею с концами резистора через амперметр, а затем подключим вольтметр параллельно резистору, как показано на рисунке

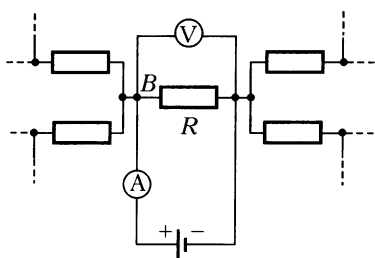


Рис. 235

235.

Наивно предполагать, что частное от деления измеренной разности потенциалов на ток дает искомое сопротивление, поскольку мы не можем быть уверенными, что в точке  $B$  весь ток, протекающий по амперметру, потечет дальше только через наш резистор  $R$ .

Задача может быть успешно решена при помощи коротких замыканий. Используем провода с нулевым сопротивлением, которыми соединяем все точки  $C, D, \dots$  и амперметр с одной и той же клеммой батареи, как показано на рисунке 236. Поскольку внутреннее сопротивление амперметра незначительно, то узлы

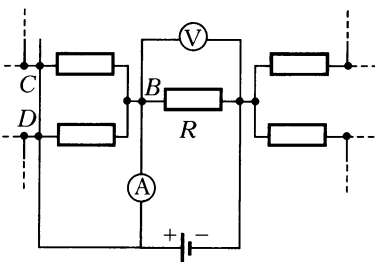


Рис. 236

$C, D, \dots$  и  $B$  – эквипотенциальные точки. Следовательно, нет никакого тока, текущего между ними, и ток от амперметра должен весь течь через резистор  $R$ . Возможно, что батарея должна обеспечить дополнительные токи, текущие к соединениям  $C, D, \dots$ , но они не имеют никакого влияния на наше измерение.

*Примечание.* Если резистор  $R$  связан параллельно с другими резисторами, то нет никакого способа измерить сопротивление этих резисторов по отдельности, можно найти только их эквивалентное сопротивление.

**Р164.** Пусть ток  $I$  втекает в куб в вершине  $A$  и вытекает из вершины  $B$ , находящейся на другом конце пространственной диагонали куба (рис.237).

Симметрия схемы приводит к тому, что токи, текущие через каждый из трех резисторов, которые подсоединены в точках  $A$  и  $B$ , равны  $I/3$ , и, следовательно, напряжения на этих резисторах одинаковы. Таким образом, наборы точек, обозначенных на рисунке буквами  $O$  и  $X$ , находятся под одинаковыми потенциалами, т.е. точки каждого набора могут быть соединены вместе без нарушения «работы» схемы.

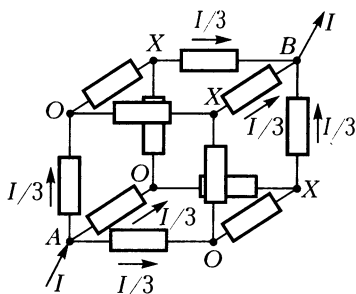


Рис. 237

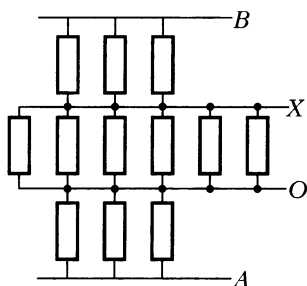


Рис. 238

Нарисуем новую эквивалентную схему (рис.238), которая существенно проще исходной. Эквивалентное сопротивление можно теперь рассчитать в уме. Действительно, если все резисторы имеют сопротивления по 1 Ом, то эквивалентное сопротивление равно  $5/6$  Ом.

Одномерный куб – это просто один резистор, сопротивление которого равно 1 Ом. Двумерный куб – это квадрат. Два резистора исходят из одного конца диагонали, и два резистора сходятся в противоположном конце той же самой диагонали. Если ток течет через квадрат, конечные точки другой диагонали эквипотенциальны, поэтому две группы двух параллельных

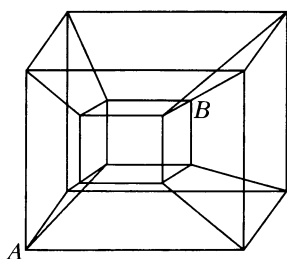


Рис. 239

резисторов связаны последовательно. Таким образом, для квадрата эквивалентное сопротивление снова равно 1 Ом. Как мы уже видели, для трехмерного куба три резистора исходят от каждого конца диагонали, а оставшиеся шесть резисторов присоединяются к эквипотенциальным точкам.

Четырехмерный куб может быть получен параллельным смещением трехмерного куба в направлении четвертого измерения, сопровождаемым соединением соответствующих точек. Четырехмерный куб поэтому имеет  $12 + 12 + 8 = 32$  грани (12 для каждого из двух нормальных кубов плюс 8 для присоединения к соответствующим углам). Искаженную проекцию такого куба можно сделать для исследовательских целей, заменяя смещение увеличением. Рисунок 239 показывает одну диагональ  $AB$  из восьми возможных.

Для четырехмерного куба из любой вершины выходят четыре ребра, и их конечные точки эквипотенциальны. То же самое справедливо для другого конца диагонали куба. Самый короткий путь от одной из этих эквипотенциальных поверхностей к другой — через любые два резистора из 24 оставшихся. Это означает, что внутренние точки этих 24 резисторов также эквипотенциальны, т.е. две группы по 12 резисторов соединены параллельно, а сами группы соединены последовательно. Развернутая в плоскости схема показана на рисунке 240; ее эквивалентное сопротивление равно  $2/3$  Ом.

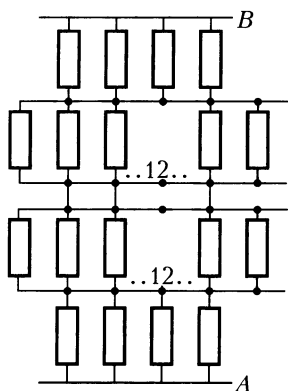


Рис. 240

*Примечание.* Задача может быть обобщена на  $n$ -мерный куб соответствующим выбором и дальнейшим соединением эквипотенциальных точек.

Вообще, эквивалентное сопротивление диагонали  $n$ -мерного куба, сделанного из резисторов сопротивлением 1 Ом, равно  $R_n$  Ом, где  $R_n$  задается формулой

$$R_n = \frac{1}{1 \cdot C_n^1} + \frac{1}{2 \cdot C_n^2} + \frac{1}{3 \cdot C_n^3} + \dots + \frac{1}{n \cdot C_n^n}.$$



**P165.** Пусть  $I$  – ток, текущий в проводе,  $S$  – сечение провода,  $\rho_1$  и  $\rho_2$  – удельные сопротивления металлов (рис.241). По закону Ома на однородном проводе длиной  $l$  напряжение падает на  $U = I\rho l/S$ , откуда для напряженности электрического поля  $E$  в проводе получаем

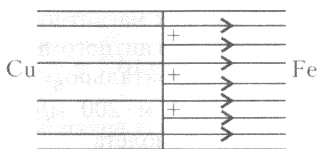


Рис. 241

$$E = \frac{U}{l} = \frac{I\rho}{S}.$$

Удельное сопротивление меди меньше, чем у железа, поэтому напряженность электрического поля должна быть в меди меньше, чем в железе. Согласно закону Гаусса, если на границе наблюдается скачок напряженности электрического поля, то эта граница имеет нескомпенсированный заряд, который в нашем случае равен

$$Q = \epsilon_0 S (E_{\text{Fe}} - E_{\text{Cu}}) = \epsilon_0 I (\rho_{\text{Fe}} - \rho_{\text{Cu}}).$$

Интересно, что этот заряд зависит от величины тока и от удельного сопротивления вещества и не зависит от сечения провода.

Подставив известные данные, получим, что накопившийся заряд равен  $Q \approx 5 \cdot 10^{-21}$  Кл, что составляет только  $1/30$  от элементарного заряда! Хотя через провод течет измеряемый макроскопический ток, накопленный заряд – это только маленькая часть микроскопического элементарного заряда. Этот странный результат показывает, что классическая электродинамика (представляющая носители заряда материальными точками) не всегда может правильно описывать электрические явления. Только применение более сложных законов квантовой теории и статистической физики может дать более точное описание рассмотренного явления.

**P166.** В единицах СИ скорость самолета равна 200 м/с.

а) Магнитное поле направлено вертикально вниз, и индуцированное напряжение равно

$$U = Blv = 6 \cdot 10^{-5} \text{ Тл} \cdot 80 \text{ м} \cdot 200 \text{ м/с} = 960 \text{ мВ}$$

при более высоком потенциале на верхней части крыла правого борта.

б) Движение самолета параллельно магнитному полю, поэтому никакая разность потенциалов не возникает.

в) Так как магнитное поле – это поле диполя, то на экваторе индукция магнитного поля в два раза меньше, чем на полюсе. Поле горизонтально, и индуцированное напряжение равно  $3 \cdot 10^{-5} \text{ Тл} \cdot 8 \text{ м} \cdot 200 \text{ м/с} = 48 \text{ мВ}$  с более высоким потенциалом на днище самолета.

г) Вертикальная составляющая индукции магнитного поля равна  $5 \cdot 10^{-5} \cdot \sin 66^\circ \text{ Тл}$ , а составляющая скорости самолета равна  $200/\sqrt{2} \text{ м/с}$ , что приводит к разности потенциалов 520 мВ между концами крыльев с более высоким потенциалом у правого борта. Аналогично, разность потенциалов 23 мВ появляется между верхней точкой (с более высоким потенциалом) и днищем самолета.

**Р167.** Пусть стержень перемещается по наклонной плоскости и в некоторый момент имеет скорость  $v$  и ускорение  $a$ , в то время как в нем течет ток  $I$ . Благодаря наличию магнитного поля стержень тормозится. Мы можем написать уравнение движения стержня:

$$ma = mg \sin \alpha - BIl.$$

Это уравнение одно и то же для всех трех случаев. Различия возникают из-за разных соотношений между индуцированными напряжениями и токами в стержне.

а) Если цепи замкнута резистором с омическим сопротивлением  $R$ , то ток  $I$  и индуцированное напряжение  $U = Blv$  связаны соотношением

$$I = \frac{U}{R} = \frac{Blv}{R}.$$

Это означает, что сила торможения увеличивается со скоростью, поэтому ускорение стержня со временем уменьшается, и в конечном счете стержень движется с постоянной скоростью. Эту конечную максимальную скорость  $v_{\max}$  можно найти из уравнения движения, если положить ускорение равным нулю, откуда получаем

$$v_{\max} = \frac{mgR \sin \alpha}{B^2 l^2}.$$

б) Пусть теперь цепь замкнута конденсатором емкостью  $C$ . Заряд на конденсаторе определяется индуцированным напряжением:

$$Q = CU = CBlv.$$

Обратите внимание на то, что ток, текущий через стержень равен

производной по времени от заряда:

$$I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dU}{dt} = CBl \frac{dv}{dt} = CBla.$$

Другими словами, ток прямо пропорционален ускорению стержня. Если полученное выражение для тока подставить в уравнение движения, то найдем ускорение стержня:

$$a = \frac{mg \sin \alpha}{m + CB^2 l^2}.$$

При этом скорость стержня (а также заряд на конденсаторе) прямо пропорциональна времени.

в) В случае если цепь замкнута катушкой индуктивностью  $L$ , соотношение между индуцированным напряжением и током будет иметь вид

$$L \frac{dI}{dt} = Blv = Bl \frac{dx}{dt}.$$

Обратим внимание на то, что в начале движения ток  $I$  и координата  $x$  равны нулю, поэтому можно записать

$$LI = Blx.$$

Подставим найденное отсюда значение тока в уравнение движения:

$$ma = mg \sin \alpha - \frac{B^2 l^2}{L} x.$$

Сила, действующая на стержень, равна сумме постоянного положительного члена и отрицательного члена, пропорционального координате  $x$ . Точно такое же уравнение описывает колебания тела, подвешенного на пружине. Таким образом, наш стержень совершает гармонические колебания относительно положения равновесия, имеющего координату

$$x_0 = \frac{mgL \sin \alpha}{B^2 l^2}.$$

Амплитуда колебаний тоже равна  $x_0$ , а зависимость смещения стержня от времени выражается так:

$$x(t) = x_0 (1 - \cos \omega t),$$

где частота колебаний равна

$$\omega = \frac{Bl}{\sqrt{mL}}.$$

**Р168.** а) В момент, когда подключается конденсатор, в стержне возникает ток  $I = U_0/R$ , и на стержень действует сила  $F = BIl$ , которая сообщает ему начальное ускорение  $a = BIU_0/(mR)$ . Заряд  $Q$  на конденсаторе и напряжение на нем начинают уменьшаться. В соответствии с законом Ленца, ЭДС самоиндукции, возникающая в разгоняющемся стержне, уменьшает ток в стержне, но при этом сама ЭДС индукции увеличивается. Это приведет к тому, что в некоторый момент суммарное напряжение в цепи окажется равным нулю. Тогда стержень будет иметь максимальную скорость  $v_{\max}$ , которая определяется выражением

$$Blv_{\max} = \frac{Q_{\min}}{C}.$$

Запишем уравнение движения стержня:

$$m \frac{dv}{dt} = ma = BIl = -Bl \frac{dQ}{dt},$$

где ускорение стержня и ток через него выражены в виде производных по времени от скорости  $(dv/dt)$  и заряда  $(dQ/dt)$  соответственно. Пропорциональность между двумя скоростями изменения не зависит от времени. Скорость стержня увеличивается от нуля до  $v_{\max}$ , пока заряд на конденсаторе уменьшается от  $Q_0 = CU_0$  до  $Q_{\min}$ . Поэтому уравнение движения можно записать в виде

$$mv_{\max} = Bl(Q_0 - Q_{\min}).$$

Конечную скорость  $v_{\max}$  и остаточный заряд  $Q_{\min}$  можно рассчитать, используя полученные ранее уравнения. Окончательно,

$$v_{\max} = \frac{BlCU_0}{m + CB^2l^2}, \quad Q_{\min} = \frac{C^2B^2l^2U_0}{m + CB^2l^2}.$$

б) Полученные выше соотношения показывают, что максимальная скорость стержня пропорциональна начальному напряжению  $U_0$  на конденсаторе. Таким образом, конечная кинетическая энергия стержня пропорциональна  $U_0^2$  (для заданных значений  $C$  и  $m$ ), т.е. пропорциональна начальной энергии системы. Коэффициент пропорциональности можно оценить как эффективность  $\eta$  (КПД) системы, рассматриваемой в качестве электромагнитной пушки, и записать в виде

$$\eta = \frac{mv_{\max}^2/2}{CU_0^2/2} = \frac{1}{\left( \frac{\sqrt{m/C}}{Bl} + \frac{Bl}{\sqrt{m/C}} \right)}.$$

Произведение двух членов в скобках равно 1, и из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим следует, что сумма слагаемых по крайней мере равна 2. Это означает, что эффективность  $\eta$  электромагнитной пушки не может быть больше чем 25%.

*Примечание.* Из условия для максимальной эффективности можно найти, что на конденсаторе осталась только половина начального заряда. Таким образом, в конденсаторе осталась только одна четверть его начальной энергии, еще одна четверть преобразовалась в кинетическую энергию стержня, а половина начальной энергии рассеялась в стержне в виде тепла.

**Р169.** а) Скорость увеличения магнитной энергии ( $W_m = LI^2/2$ ) равна разности между мощностью батареи и мощностью рассеяния тепла в резисторе:

$$\frac{dW_m}{dt} = UI - I^2R = -R \left( I - \frac{U}{2R} \right)^2 + \frac{U^2}{4R} \leq \frac{U^2}{4R}.$$

Ясно, что скорость увеличения энергии максимальна, когда

$$I = \frac{U}{2R}.$$

б) По второму закону Кирхгофа,

$$U = IR + L \frac{dI}{dt}.$$

Из этого уравнения получаем зависимость тока от времени:

$$I(t) = \frac{U}{R} (1 - e^{-Rt/L}),$$

график которой представлен на рисунке 242. Мощность  $P(t)$ ,

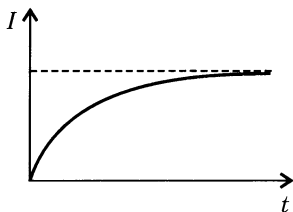


Рис. 242

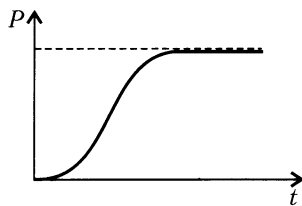


Рис. 243

рассеянная в резисторе в виде тепла, равна

$$P(t) = I^2R = \frac{U^2}{R} (1 - e^{-Rt/L})^2.$$

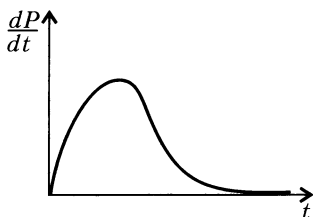


Рис. 244

На рисунке 243 показан график  $P(t)$ , из которого видно, что мощность увеличивается монотонно. Скорость изменения мощности сначала нарастает, в какой-то момент достигает максимума и затем уменьшается монотонно до нуля, как показано на рисунке 244.

Самая большая скорость изменения энергии, как для катушки индуктивности, так и для резистора, имеет место тогда, когда  $I^2$  изменяется очень быстро. В пункте а) мы нашли, что это происходит, при  $I = U/(2R)$ . Подстановка этого значения в выражение для мощности позволяет найти соответствующий момент времени:

$$t = \frac{L}{R} \ln 2 \approx 0,69 \frac{L}{R}.$$

*Примечание.* Скорость получения энергии от батареи равна  $UI$ , и, таким образом, она пропорциональна току, который монотонно увеличивается.

Самое быстрое увеличение тока имеет место при  $t = 0$ , но самое быстрое увеличение квадрата тока (который пропорционален магнитной энергии катушки) происходит позже.

Просто для забавы вы можете решить «зеркально-симметричную» задачу, в которой катушка индуктивности заменена конденсатором.

**Р170.** а) Такие цепи, трудоемкие для анализа с помощью дифференциальных уравнений, становятся простыми, если использовать комплексные импедансы. Импеданс катушки индуктивностью  $L$  при угловой частоте  $\omega$  равен  $i\omega L$ , импеданс конденсатора емкостью  $C$  равен  $1/(i\omega C)$ . Здесь мнимая единица  $i$  равна квадратному корню из  $-1$ , т.е.  $i^2 = -1$ . Импедансы подчиняются тем же самым правилам, что и сопротивления резисторов, а именно: при последовательном соединении общее сопротивление равно

$$R = R_1 + R_2,$$

при параллельном соединении общее сопротивление равно

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Для схемы, представленной в условии задачи на рисунке 75, полный импеданс  $Z$  записывается в виде

$$Z = \frac{i\omega L \cdot i\omega L}{i\omega L + i\omega L} + \frac{(1/(i\omega C)) \cdot (1/(i\omega C))}{(1/(i\omega C)) + (1/(i\omega C))} = \\ = \frac{i\omega L}{2} + \frac{1}{2i\omega C} = \frac{1 - \omega^2 LC}{2i\omega C}.$$

Величина тока, идущего от источника, равна

$$|I| = \frac{|U_0|}{|Z|} = \frac{U_0 |2i\omega C|}{|1 - \omega^2 LC|} = CU_0\omega_0 \frac{2x}{|1 - x^2|},$$

где  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  – собственная частота,  $x = \omega/\omega_0$  – относительная частота колебаний. Зависимость амплитуды тока от относительной частоты для этого случая изображена на рисунке 245.

Заметим, что теоретически ток увеличивается без предела, когда  $\omega$  приближаются к  $\omega_0$ , но практически источник не будет способен создать такой ток. В любом случае реальные катушки индуктивности и провода имеют ненулевое сопротивление, и пик на рисунке 245 имеет конечную величину.

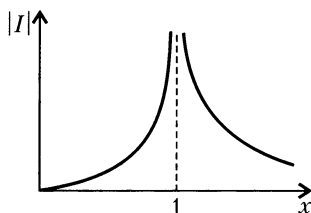


Рис. 245

Подобным образом рассчитаем импеданс схемы, представленной в условии задачи на рисунке 76:

$$Z = \frac{i\omega L \cdot (1/(i\omega C))}{i\omega L + (1/(i\omega C))} + \frac{i\omega L \cdot (1/(i\omega C))}{i\omega L + (1/(i\omega C))}.$$

Откуда следует

$$|Z| = \frac{2\omega L}{|1 - \omega^2 LC|}, \quad |I| = \frac{CU_0\omega_0 |1 - x^2|}{2x}.$$

Зависимость амплитуды тока от относительной частоты в этом случае изображена на рисунке 246. Заметим, что при  $\omega = \omega_0$  схема имеет бесконечный импеданс, и ток через нее не идет.

Интересно также, что зависимость амплитуды тока на рисунках 245 и 246 – взаимно обратные функции.

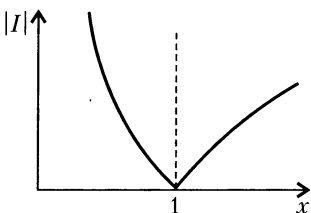


Рис. 246

6) Катушки индуктивностью  $L$ ,  $2L$ ,  $L/2$  и конденсаторы емкостью  $C$ ,  $2C$ ,  $C/2$ , полученные из одинаковых компонентов при их последовательном или параллельном соединении, широко используются для того, чтобы конструировать цепи, настроенные на разные резонансные частоты. В данном случае – на резонансные частоты  $\omega_0$ ,  $\omega_0/2$ ,  $2\omega_0$ ,  $\omega_0 \sqrt{2}$ ,  $\sqrt{2}\omega_0$ . Как показано на рисунке 247, для двух из них имеются два варианта.

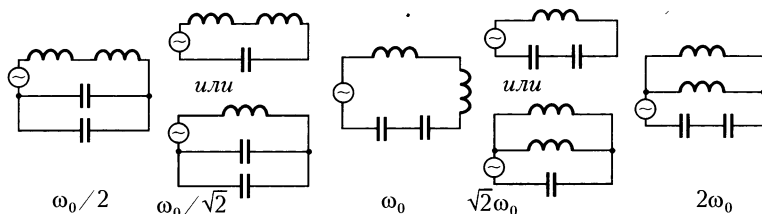


Рис. 247

**Р171.** В случае замкнутой цепи через элементы схемы идут токи, как показано на рисунке 248. Как только цепь разомкнули,

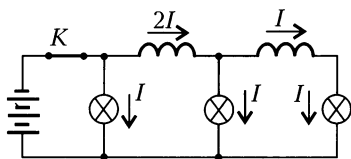


Рис. 248

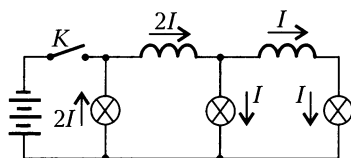


Рис. 249

токи, текущие в каждой катушке, практически остаются теми же самыми. Если бы это было не так, то имело бы место быстрое изменение магнитного потока, которое индуцировало бы очень высокое напряжение в катушке. Поэтому токи  $2I$  и  $I$  продолжают течь в катушках и определяют токи, текущие через лампы (рис. 249).

Это означает, что самая близкая к выключателю лампа внезапно вспыхнет, а яркость двух других ламп не изменится. Так происходит в течение очень короткого периода времени, а впоследствии все три лампы постепенно уменьшат силу свечения и погаснут.

**Р172.** Площадь поперечного сечения области, которая заполнена витками соленоида, фиксирована, а площадь сечения провода изменяется как  $d^2$ , где  $d$  – диаметр провода. Таким образом, число витков  $n \sim d^{-2}$ . Сопротивление одного витка обратно пропорционально площади поперечного сечения провода, т.е. изменяется как  $d^{-2}$ , и, следовательно, сопротивление на



единицу длины соленоида  $R \sim nd^{-2} \sim d^{-4}$ . Заданное магнитное поле  $B \sim nI$ , поэтому требуемый ток  $I \sim n^{-1}$ . Тепло, рассеянное с единицы длины, есть  $RI^2 \sim (d^{-4})(n^{-1})^2 = (d^{-4})(d^2)^2 = 1$ , т.е. не зависит от  $d$ . Это означает, что в плане нагревания не имеет значения, какого диаметра выбрать провод.

**P173.** Уравнение, описывающее силы, которые удерживают свободный электрон на круговой орбите (внутри цилиндра), имеет вид

$$eE \pm e r \omega B = m r \omega^2,$$

где  $e$  – заряд электрона,  $m$  – его масса,  $r$  – расстояние от оси вращения и  $E$  – напряженность электростатического поля, возникающего в цилиндре из-за перераспределения заряда. Знак « $\pm$ » показывает, что магнитная сила Лоренца может быть направлена внутрь или наружу, в зависимости от направления вращения цилиндра. Преобразование уравнения движения дает

$$Ee = \left( \frac{m\omega^2}{e} \pm \omega B \right) r \equiv Kr,$$

откуда видно, что напряженность электростатического поля непосредственно пропорциональна радиусу орбиты.

Используя закон Гаусса, можно найти плотность электрического заряда в цилиндре. Рассмотрим тонкую цилиндрическую оболочку, изображенную на рисунке 250, и обозначим плотность заряда на расстоянии  $r$  от оси через  $\rho$ . Поток вектора напряженности, который входит изнутри в цилиндрическую оболочку, равен  $2\pi r L E(r)$ , а который выходит из нее, равен

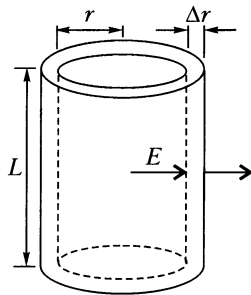


Рис. 250

$$2\pi(r + \Delta r) E(r + \Delta r).$$

Согласно закону Гаусса, имеем

$$K(r + \Delta r) \cdot 2\pi(r + \Delta r)L - Kr \cdot 2\pi r L = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \cdot 2\pi r \Delta r L.$$

Теперь можем получить выражение для плотности заряда:

$$\rho = \frac{2\epsilon_0 \omega m}{e} \left( \omega \pm \frac{eB}{m} \right).$$

Отметим, что плотность заряда не зависит от  $r$ . Она может быть положительная, отрицательная или нулевая – в зависимости от направлений и величин магнитного поля и угловой скорости. Плотность заряда равна нулю, если  $\omega = eB/m$ . Для этой ситуации положительные и отрицательные заряды не разделены внутри цилиндра, совершая вместе с цилиндром круговое движение.

*Примечание.* Чтобы получить представление о порядках используемых величин, примите, что данное магнитное поле сопоставимо с магнитным полем Земли около экватора, т.е.

$B = 3 \cdot 10^{-5}$  Тл. Нулевая плотность заряда соответствует угловой скорости  $\omega = eB/m = 5,3 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$  – это больше чем 50 миллионов оборотов в минуту! Такое быстрое вращение не может быть реализовано практически, так как никакой материал не выдержит этого.

**Р174.** Распределение электрического заряда в любой точке во вращающейся системе координат  $K'$  такое же, как и в лабораторной (инерциональной) системе координат  $K$ , потому что плотность заряда пропорциональна числу электронов в единичном объеме, а число и объем не зависят от системы координат, т.е. инвариантны. Из этого следует, что плотность электрического заряда однородна во вращающейся системе координат и равна

$$\rho' = \rho = 2\epsilon_0 \left( \pm B\omega + \frac{m\omega^2}{e} \right) \approx \pm 2\epsilon_0 B\omega.$$

Сила, действующая на заряженную частицу, должна быть одной и той же в обеих системах отсчета (это иллюстрируется, например, тем фактом, что удлинение пружины, которое измеряет силу, не зависит от системы отсчета). Таким образом,  $\vec{F}' = \vec{F}$ .

Во вращающейся системе координат, связанной с цилиндром, свободные электроны металла находятся в покое, и, таким образом, суммарная сила, действующая на них, должна быть нулевой (иначе они двигались бы). Если центробежной силой пренебрегают, то это означает, что электрическое поле также должно быть нулевым ( $E' = 0$ ). Далее,

$$Q \left( \vec{E} + [\vec{v} \times \vec{B}] \right) = \vec{F} = \vec{F}' = Q \left( \vec{E}' + [(\vec{v} + \vec{v}_{\text{отн}}) \times \vec{B}'] \right),$$

где  $\vec{v}_{\text{отн}}$  – относительная скорость двух систем координат, которая различна для разных точек цилиндра. Напомним, что

$E = \omega B r$ , и заметим, что векторное произведение  $[\vec{v}_{\text{отн}} \times \vec{B}']$  равно  $\omega B' r$  и направлено по радиусу. Тогда мы делаем вывод, что магнитное поле то же самое в обеих системах координат, т.е.  $\vec{B}' = \vec{B}$ . Из этого следует, что во вращающейся системе отсчета электрические заряды могут существовать без связанного с ними электрического поля, как показано на рисунке 251.

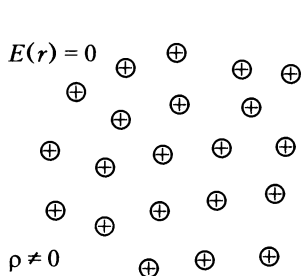


Рис. 251

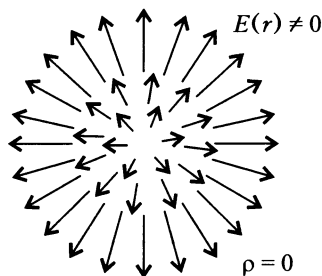


Рис. 252

Точно так же можно доказать, что в системе отсчета наблюдателя, вращающегося в однородном магнитном поле, существует неоднородное электрическое поле, хотя нет никаких электрических зарядов (рис.252).

Это означает, что закон Гаусса (соотношение между электрическим потоком и зарядами, связанными с ним) не выполняется во вращающихся системах отсчета. Это — удивительный результат, который справедлив даже при медленном (нерелятивистском) движении.

**Р175.** Ошибочно рассматривать данную задачу как одномерную. Величина электрического поля, рассчитанная Джеком, правильная ( $E(r) = \omega B r$ ), но направление электрического поля в пределах вращающейся спицы направлено по радиусу от оси вращения, как показано на рисунке 253. Это означает, что электрический поток через боковую поверхность цилиндрического стержня отличен от нуля.

Более того, как будет показано ниже, для элементарного цилиндра полный поток через боковую поверхность спицы равен величине потока через ее внешний конец. Вероятно, это удивительно, что половина электрического потока выходит через боковую поверхность цилиндра.

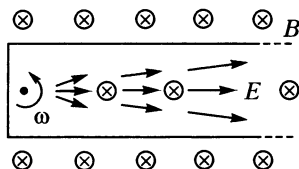


Рис. 253

Правильный результат можно рассчитать, используя закон Гаусса. Соответственно выбранная поверхность показана на рисунке 254. Полный поток вектора напряженности электрического поля равен

$$\begin{aligned}\Phi &= E(r + \Delta r)h(r + \Delta r)\theta - E(r)h r \theta = \\ &= B\omega h\theta \left( (r + \Delta r)^2 - r^2 \right) \approx 2B\omega h\theta r \Delta r.\end{aligned}$$

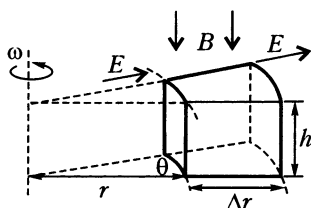


Рис. 254

Мы можем связать поток с плотностью заряда, используя соотношение

$$\Phi = \frac{\rho \Delta V}{\epsilon_0} = \frac{\rho h \theta r \Delta r}{\epsilon_0},$$

которое дает величину плотности заряда \$\rho\$, идентичную величине, которую получила Джилл.

**Примечание.** Плотность заряда может быть или положительной, или отрицательной, в зависимости от направлений вращения и индукции магнитного поля. Распределение заряда внутри спицы однородно, но результирующий заряд на спице нулевой, поскольку на поверхности спицы есть заряды противоположного знака. Поверхностное распределение сложное и не может быть найдено элементарными методами.

**Р176.** Разложим магнитное поле Земли на горизонтальную и вертикальную составляющие. Вертикальная составляющая не вызывает никакого тока в кольце, так как она находится в плоскости кольца. Пусть \$B\$ — горизонтальная составляющая магнитного поля, \$\omega\$ — угловая скорость вращения кольца. Магнитный поток \$\Phi\$, пронизывающий кольцо, равен

$$\Phi = \pi r^2 B \cos \omega t,$$

поэтому напряжение самоиндукции составляет

$$U = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega \pi r^2 B \sin \omega t.$$

Ток, текущий в кольце, равен

$$I = \frac{U}{R} = \frac{\omega \pi r^2 B}{R} \sin \omega t.$$

Этот ток индуцирует в центре кольца магнитное поле

$$B_I = \frac{\mu_0 I}{2r} = \frac{\mu_0 \omega \pi r B}{2R} \sin \omega t.$$

Направление этого магнитного поля перпендикулярно плоскости кольца и вращается вместе с ним.

Разложим вектор  $\vec{B}_l$  на параллельный внешнему полю  $\vec{B}$  и перпендикулярный ему. Параллельная составляющая пропорциональна произведению  $\cos \omega t \sin \omega t = \frac{1}{2} \sin 2\omega t$ , которое дает ноль при усреднении по времени. Перпендикулярную компоненту можно выразить так:

$$B_{\perp} = \frac{\mu_0 \omega \pi r B}{2R} \sin^2 \omega t = \frac{\mu_0 \omega \pi r B}{4R} (1 - \cos 2\omega t).$$

При усреднении по времени справа останется только первый член:

$$B_{\perp \text{cp}} = \frac{\mu_0 \omega \pi r B}{4R}.$$

Вот это поле и заставляет магнитную стрелку отклоняться на  $\alpha = 2^\circ$  от ее исходного направления (между севером и югом). Так как стрелка ориентируется по направлению суммарного магнитного поля, то угол отклонения определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{B_{\perp \text{cp}}}{B} = \frac{\mu_0 \omega \pi r}{4R}.$$

Стрелка будет совершать небольшие колебания относительно вышеупомянутого положения с амплитудой, определенной в соответствии с механическими и магнитными характеристиками стрелки и силами демпфирования.

Интересно обратить внимание на то, что угол отклонения магнитной стрелки не зависит от величины геомагнитного поля. Единственно, что важно, — это то, чтобы горизонтальная составляющая этого поля не была нулевой. Сопротивление кольца можно рассчитать из последней формулы и получить

$$R = 1,78 \cdot 10^{-4} \text{ Ом}.$$

**Р177.** Обозначим  $I$  ток через вольтметр и  $i$  — ток через большую дугу кольца. Тогда показания вольтметра заданы:  $RI$ . Применяя законы Кирхгофа для двух приведенных в условии задачи схем, получаем уравнения

$$RI + \frac{\theta}{2\pi} r (I + i) = \frac{1}{2} a^2 \lambda \frac{dB}{dt},$$

$$ri + \frac{\theta}{2\pi} r I = \pi a^2 \frac{dB}{dt}.$$

В случае а)  $\lambda = \theta$ , и решение системы уравнений дает, что  $I = 0$ ; следовательно, и показание вольтметра равно нулю.

В случае б)  $\lambda = \theta - \sin \theta$ , и прямые, но достаточно длинные алгебраические расчеты приводят к тому, что показания вольтметра будут равны

$$U = \frac{2\pi^2 R a^2 \sin \theta}{4\pi^2 R + r\theta(2\pi - \theta)} \frac{dB}{dt}.$$

**Р178.** Рассмотрим два касающихся друг друга диска, каждый радиусом  $L/(2\pi)$ , как показано на рисунке 255. Если диски расположены в плоскости, перпендикулярной однородному магнитному полю, то на их свободных концах возникает напряжение

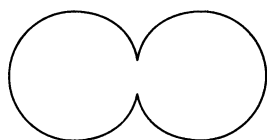


Рис. 255

$$U = 2\pi R^2 \frac{\Delta B}{\Delta t}.$$

Прокрутим диск, расположенный справа, на  $180^\circ$  относительно его оси симметрии  $e$  (рис.256,а). Его верхняя (темная) сторона тогда становится нижней стороной (рис.256,б). Теперь повернем тот же самый диск снова на  $180^\circ$ , но на сей раз

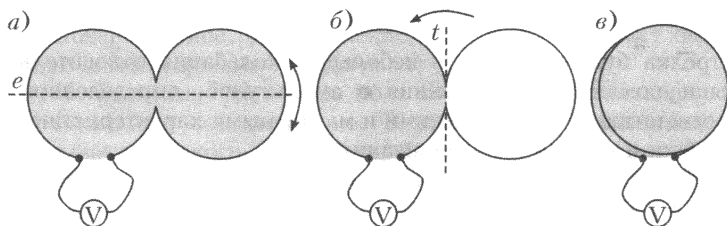


Рис. 256

относительно оси  $t$ . В итоге, темные стороны обоих дисков теперь находятся наверху (рис.256,в), и периметр их точно такой же, как периметр нашей ленты Мёбиуса.

Таким образом, в случае с лентой в равномерно изменяющемся магнитном поле, показание вольтметра будет равно

$$U = 2\pi R^2 \frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{kL^2}{2\pi}.$$

Это значение намного выше того, которое можно было бы naивно ожидать, если бы рассуждение велось относительно площади просто бумажной полоски. Область (односторонней) поверхности, охватывающей ленту Мёбиуса, не такая, как площадь

бумажной полоски, и для узких лент она реально намного больше!

Напряжение самоиндукции можно определить, превратив лист Мёбиуса в обычный виток в виде восьмерки (см. рис.255) и складывая алгебраически значения напряжений, возникающих при каждом повороте (принимая во внимание их «направления»). В данном случае напряжения в обеих петлях одни и те же, поэтому напряжение  $U_0 = k\pi R^2$ , возникающее в одной петле, просто удваивается. Итак, полное напряжение равно

$$U = 2U_0 = 2k\pi R^2.$$

**Р179.** Ток  $I$  от времени  $t$  во внешнем соленоиде изменяется по закону  $I = kt$ , а ток  $2I$  во внутреннем соленоиде – по закону  $2I = 2kt$ , где  $k$  – константа. Эти токи создают магнитное поле  $B = \mu_0 nkt$  во внешнем соленоиде и поле  $3B$  во внутреннем, где  $n$  – число витков на единицу длины. Магнитный поток через площадь, ограниченную траекторией частицы радиусом  $r$ , равен

$$\Phi = \pi R^2 \cdot 2B + \pi r^2 \cdot B = (2R^2 + r^2) \pi \mu_0 nkt.$$

Постоянную величину индуцированного электрического поля  $E$  можно рассчитать по скорости изменения магнитного потока со временем:

$$E \cdot 2\pi r = \frac{d\Phi}{dt} = (2R^2 + r^2) \pi \mu_0 nk,$$

откуда

$$E = \frac{(2R^2 + r^2) \mu_0 nk}{2r}.$$

Заряженная частица удерживается на своей круговой орбите силой Лоренца:

$$\frac{mv^2}{r} = qvB, \quad (*)$$

а ускоряется вдоль круговой орбиты электрическим полем:

$$ma_t = qE,$$

где  $m$  – масса,  $v$  – скорость,  $a_t$  – касательное ускорение и  $q$  – электрический заряд частицы. Поскольку электрическое поле  $E$  постоянно, скорость  $v$  частицы увеличивается со временем равномерно:

$$v = a_t t = \frac{qEt}{m} = \frac{(2R^2 + r^2) \mu_0 nkqt}{2mr}.$$

Подставляя выражения для  $v$  и  $B$  в уравнение (\*), получаем

$$\frac{m}{r} \frac{(2R^2 + r^2) \mu_0 n k q t}{2\pi r} = q \mu_0 n k t.$$

Это уравнение удовлетворяется, если

$$\frac{2R^2 + r^2}{2r^2} = 1,$$

откуда получаем

$$r = \sqrt{2}R.$$

**Р180.** Изменяющееся магнитное поле индуцирует в кольце электрическое поле. Так как кольцо диэлектрическое, заряды на нем закреплены. Мысленно разделим кольцо на маленькие участки длиной  $\Delta s$  и обозначим  $E_t$  касательную составляющую индуцированного электрического поля (в общем случае  $E_t$  может изменяться от точки к точке). Заряд  $\Delta Q$  на маленьком участке  $\Delta s$  кольца равен

$$\Delta Q = Q \frac{\Delta s}{2\pi r},$$

где  $r$  — радиус кольца. На этот заряд действует сила

$$\Delta F_t = \Delta Q E_t$$

и момент сил

$$\Delta M = r \Delta F_t.$$

Полный крутящий момент, испытываемый кольцом, равен

$$M = \sum \Delta M = \sum r Q \frac{\Delta s}{2\pi r} E_t = \frac{Q}{2\pi} \sum E_t \Delta s.$$

Сумма  $\sum E_t \Delta s$  — это индуцированная электродвижущая сила, возникающая в кольце, которая прямо пропорциональна скорости изменения магнитного потока:

$$\sum E_t \Delta s = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -\pi r^2 \frac{\Delta B}{\Delta t}.$$

Под действием крутящего момента кольцо, которое имеет момент инерции  $I = mr^2$ , начинает раскручиваться с угловым ускорением  $\alpha$ . В течение малого интервала времени  $\Delta t$  его угловая скорость  $\omega$  изменяется на

$$\Delta \omega = \alpha \Delta t = \frac{M}{I} \Delta t = \frac{Q}{2\pi} \left( -\pi r^2 \frac{\Delta B}{\Delta t} \right) \frac{1}{mr^2} \Delta t = -\frac{Q}{2m} \Delta B.$$



Так как магнитное поле увеличивается от нуля до  $B$ , то конечная угловая скорость кольца будет

$$\omega = -\frac{QB}{2m}.$$

*Примечания:* а) Отрицательный знак показывает, что, если заряд положительный, то направление вектора угловой скорости противоположно вектору магнитной индукции.

б) Интересно обратить внимание на то, что конечная угловая скорость зависит только от изменения магнитного потока и не зависит от радиуса кольца, времени, в течение которого магнитный поток изменяется, и характера его изменения во времени.

в) При вычислениях мы пренебрегли магнитным полем, возникающим из-за вращающегося кольца (на нем ведь заряды закреплены).

г) Кроме случая цилиндрически симметричного однородного магнитного поля, невозможно найти значение индуцированного внутри кольца электрического поля, не зная геометрической структуры магнитного поля и местоположения кольца в магнитном поле. Мы можем определить лишь полную величину индуцированной электродвижущей силы, но не напряженности электрического поля.

**Р181.** Результирующее магнитное поле  $B'$  является суммой магнитных полей Земли  $B_0$  и соленоида  $B$ :

$$B' = B_0 \pm B.$$

Ток  $I$ , возникающий в соленоиде, определяется индуцированным напряжением  $U_{\text{инд}}$  и сопротивлением  $R$ :

$$I = \frac{U_{\text{инд}}}{R} = \frac{B'r^2\omega}{2R},$$

где индуцированное напряжение пропорционально скорости, с которой радиус диска «заметает» поток магнитного поля. Магнитное поле, создаваемое током соленоида, равно

$$B = \mu_0 nI.$$

Решая систему полученных уравнений, определяем  $B$ ,  $B'$  и  $I$ . Два знака, встречающиеся в первом уравнении, допускают как положительное, так и отрицательное значения угловой скорости. Значение  $\omega$  принимается положительным, если магнитное поле соленоида действует согласно с магнитным полем Земли. Таким образом, получаем следующие выражения для суммарного маг-

нитного поля  $B'$  и тока  $I$ :

$$B' = \frac{2RB_0}{2R - \mu_0 r^2 \omega n}, \quad I = \frac{B_0 r^2 \omega}{2R - \mu_0 r^2 \omega n}.$$

Когда диск покоится,  $I = 0$ , и суммарное магнитное поле  $B'$  равно просто  $B_0$ , т.е. магнитному полю Земли.

Если направление вращения таково, что поле соленоида направлено против внешнего магнитного поля ( $\omega < 0$ ), суммар-

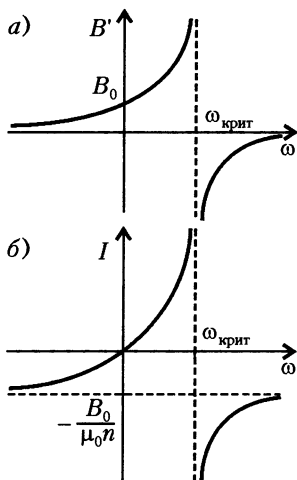


Рис. 257

ное поле  $B'$  с увеличением угловой скорости диска асимптотически уменьшается до нуля. На таких высоких скоростях вращения ток в катушке стремится к  $-B_0/(\mu_0 n)$  (такой ток необходим, чтобы нейтрализовать магнитное поле Земли). Вращение диска в противоположном направлении ( $\omega > 0$ ) заставляет суммарное магнитное поле увеличиваться. Это ведет к более высокому индуцированному напряжению и большему значению тока, что, в свою очередь, приводит к дальнейшему увеличению магнитного поля. В условиях положительной обратной связи как магнитное поле, так и ток стремятся к бесконечности, когда угловая частота  $\omega$  достигает критического зна-

чения  $\omega_{\text{крит}} = 2R/(\mu_0 r^2 n)$ , как показано на рисунке 257. При этом тепло, выделяемое в катушке, тоже должно стать бесконечно

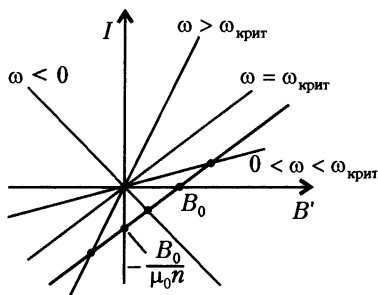


Рис. 258

большим. Но этого практически не происходит, так как система, приводящая соленоид во вращение, не может удерживать угловую скорость на уровне  $\omega_{\text{крит}}$  и количество оборотов в единицу времени становятся больше критического значения, в результате чего ток и магнитное поле уменьшаются.

«Странное» поведение системы легче понять, если отно-

шение между током в соленоиде и результирующим магнитным полем представить графически (рис.258). Согласно полученному ранее уравнению

$$I = \frac{B'r^2\omega}{2R},$$

ток  $I$  пропорционален  $B'$  таким образом, что коэффициент пропорциональности зависит от угловой скорости  $\omega$ . График зависимости  $I$  от  $B'$  представляет прямую линию, проходящую через начало координат, с тангенсом угла наклона, пропорциональным  $\omega$ . Уравнение

$$B' = B_0 + \mu_0 n I$$

для магнитного поля выражает также линейную зависимость, но ее график не проходит через начало координат. Тангенс угла наклона пропорционален  $1 (\mu_0 n)$  и не зависит от  $\omega$ . Пересечение этих двух прямых и определяет фактический ток и суммарное магнитное поле. Если  $\omega = \omega_{\text{крит}}$ , то наклоны двух прямых одинаковы, и уравнения не имеют решения. Практически, критическая угловая частота настолько высока, что на практике к соответствующему состоянию нельзя даже приблизиться.

Джоулево тепло, выделяемое соленоидом, должно быть равно механической работе, произведенной при вращении диска. Электрическая мощность равна  $P_{\text{эл}} = I^2 R$ , в то время как механическая мощность равна произведению крутящего момента  $M$  на угловую скорость  $\omega$ , т.е.  $P_{\text{мех}} = M\omega$ . Крутящий момент  $M$  равен произведению силы  $B'Ir$  на среднее расстояние  $r/2$  ее линии действия от оси. Использование соотношения между  $B'$  и  $I$  подтверждает, что  $P_{\text{эл}} = P_{\text{мех}}$ .

Устройство, описанное в этой задаче, называется однополярным динамо.

**P182.** Полный магнитный поток пронизывающий кольцо, состоит из потока внешнего магнитного поля и собственного потока, обусловленного самоиндукцией:

$$\Phi = B_z \pi r_0^2 + L I.$$

Любое изменение магнитного потока индуцирует ток в кольце в соответствии с формулой

$$RI = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}.$$

Поскольку омическое сопротивление  $R$  сверхпроводящего кольца равно нулю, магнитный поток через кольцо не должен

изменяться, т.е.

$$\Phi = B_0 (1 - \alpha z) \pi r_0^2 + LI = \text{const}.$$

С учетом начальных условий ( $z = 0, I = 0$ ) получаем

$$\Phi = B_0 \pi r_0^2.$$

Тогда ток в кольце равен

$$I = \frac{B_0 \alpha z \pi r_0^2}{L}.$$

Силу Лоренца, действующую на кольцо (которая может быть только вертикальной, из-за симметрии устройства), можно записать в виде

$$F_z = -B_r \cdot 2\pi r_0 I(z) = -B_0 \beta r_0 \cdot 2\pi r_0 \frac{B_0 \alpha z \pi r_0^2}{L} = -kz,$$

где

$$k = \frac{2\alpha\beta(\pi r_0^2 B_0)^2}{L}.$$

Сила Лоренца, таким образом, прямо пропорциональна вертикальному смещению кольца с коэффициентом пропорциональности  $k$ , который определяется из данных задачи. Этот результат верен только для малых смещений, так как магнитная индукция для больших изменений координат описывается более сложными формулами.

Запишем уравнение движения кольца:

$$ma_z = F_z - mg = -kz - mg.$$

Из уравнения следует, что кольцо совершает гармонические колебания около положения равновесия  $z_0 = -mg/k$  по закону

$$z(t) - z_0 = A \cos \omega t,$$

где  $\omega = \sqrt{k/m}$ . Из начальных условий следует, что  $A = -z_0$ , тогда

$$z(t) = \frac{g}{\omega^2} (\cos \omega t - 1).$$

Вертикальная координата  $z \leq 0$ , из чего следует, что сила Лоренца всегда направлена вверх и обращается в ноль в самой верхней точке колебаний. Ток в кольце течет всегда в одном и том же направлении.

Подстановка числовых данных дает:  $\omega = 31,2 \text{ с}^{-1}$  и  $A = 1 \text{ см}$ . Используя выражение  $z(t)$ , можно теперь записать зависимость

тока, текущего в кольце, от времени в виде

$$I = \frac{B_0 \alpha \pi r_0^2}{L} z(t) = \frac{B_0 \alpha \pi r_0^2 A}{L} (\cos \omega t - 1).$$

Максимальное значение тока, которое соответствует минимальному расстоянию кольца от магнита, равно  $I_{\max} = 39 \text{ А}$ .

**Р183.** Запишем закон сохранения энергии для частицы массой  $m$  и зарядом  $Q$  (рис.259):

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kQ \cos \theta}{r^2} = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{kQ \cos(\pi/2)}{r^2} = 0.$$

Отсюда выразим скорость бусинки  $v$  в зависимости от угла  $\theta$ :

$$v = \sqrt{-\frac{2kQ}{mr^2} \cos \theta},$$

где угол  $\theta$  может изменяться в пределах  $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ .

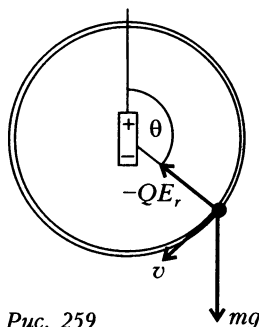


Рис. 259

Для кругового движения частицы необходима радиальная составляющая силы, равная  $mv^2/r$ . Радиальную составляющую силы, с которой электрический диполь действует на единичный заряд, т.е. радиальную составляющую электрического поля диполя, можно рассчитать по потенциалу:

$$E_r = -\frac{d\phi}{dr} = \frac{2k}{r^3} \cos \theta.$$

Используя выражение для скорости  $v$ , мы замечаем, что  $QE_r$  в точности равно  $-mv^2/R$ , что и требуется для обеспечения центростремительного ускорения. Таким образом, кольцо не должно испытывать поперечной силы при движении бусинки. И наоборот, отсутствие кольца никак не скажется на поведении бусинки. Бусинка всегда совершает движение по кругу. Она начинает двигаться из заданной точки, ускоряется, потом замедляется и останавливается на противоположной стороне окружности, а затем движется в обратную сторону. Эти периодические движения будут продолжаться бесконечно долго.

*Примечание.* Движение бусинки аналогично движению математического маятника, нить которого в начальный момент отклонена на  $90^\circ$  от вертикали.

**Р184.** Представьте себе, что вы находитесь в системе отсчета, двигающейся горизонтально с постоянной скоростью  $v$ , перпен-

дикулярной линиям магнитного поля, и вы несете заряд  $q$ . В неподвижной системе отсчета (связанной с землей) заряд, перемещающийся со скоростью  $v$ , испытывает силу Лоренца, равную  $qvB$  и направленную вверх или вниз, в зависимости от направления движения.

В движущейся системе отсчета заряд находится в покое, и сила Лоренца на него не действует, хотя он и «чувствует» силу. (Присутствие силы, вызванной некоторым взаимодействием, не может зависеть от системы координат, в которой она описывается.)

Это кажущееся противоречие может быть разрешено преобразованием электрического и магнитного полей при переходе из одной системы в другую. В данном случае в неподвижной системе отсчета имеется только магнитное поле и нет никакого электрического поля. В системе координат, которая перемещается (со скоростью, намного меньшей, чем скорость света), может наблюдаться это же самое магнитное поле, но присутствует также и электрическое поле напряженностью  $E = vB$ , которое обеспечивает силу

$$F = qE = qvB.$$

Пусть скорость подвижной системы отсчета будет такой, чтобы электрическая сила, описанная выше, была равна силе тяготения:

$$qvB = qE = F = mg.$$

Теперь опишем движение тела в этой подвижной системе. Так как действия электрического и гравитационного полей скомпенсированы, а тело движется со скоростью  $-v$  в этой системе, то на него действует сила  $-qvB$  (сила Лоренца). Это заставляет его двигаться по окружности, винтообразно спускающейся вниз, согласно уравнению  $qvB = mv^2/r$ , где  $r$  — радиус окружности. Используя значения скорости и радиуса, определяем время, за которое тело делает один оборот, и получаем

$$T = \frac{2\pi m}{qB}$$

независимо от скорости  $v$ .

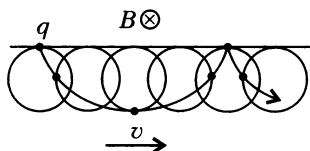


Рис. 260

В неподвижной системе равномерное поступательное движение наложено на это равномерное круговое движение. Частица поэтому следует по циклоидальной траектории, как показано на рисунке 260, опускаясь вниз до  $2r = 2mv/(qB)$  и

затем поднимаясь снова до своей начальной высоты за время  $T$ . Соответствующее горизонтальное смещение равно  $Tv = 2\pi r$ . В этой точке частица останавливается на мгновение, прежде чем начать новый путь по циклоиде.

**P185.** Если магнит падает с постоянной предельной скоростью  $v_0$  и проходит расстояние  $L$ , то потеря его потенциальной энергии преобразуется в джоулево тепло, выделяемое индуцированным током в металлических кольцах. Обозначив выделяемое количество теплоты в одном кольце через  $Q$ , мы можем записать

$$mgL = Q \frac{L}{h}, \text{ т.е. } Q = mgh.$$

От каких величин может зависеть  $Q$ ? Если магнит перемещается с постоянной скоростью  $v_0$ , то напряжение самоиндукции, возникающее в каждом кольце, можно считать постоянным. Так как мощность, выделяемая в резисторе, подключенном к источнику постоянного напряжения, обратно пропорциональна его сопротивлению, то  $Q \sim R^{-1}$ . Кроме того,  $Q$  может зависеть от  $v_0$ ,  $\mu$  и  $r$ . Поэтому запишем выражение для  $Q$  в таком виде:

$$Q = \frac{1}{R} f(v_0, \mu, r).$$

Иными словами, произведение  $QR$  представляет собой некую функцию предельной скорости  $v_0$ , магнитного момента  $\mu$  и радиуса  $r$  проволочного кольца. Помимо этого, в формулу может войти магнитная постоянная  $\mu_0$ .

Рассмотрим размерности отдельных величин. Размерность произведения  $RQ$  равна

$$[RQ] = \text{кг}^2 \cdot \text{м}^4 \cdot \text{с}^{-5} \cdot \text{А}^{-2}.$$

Размерность функции  $f(v_0, \mu, r)$  должна быть произведением таких размерностей:

$$[v_0] = \text{м} \cdot \text{с}^{-1}, \quad [\mu] = \text{А} \cdot \text{м}^2, \quad [r] = \text{м}, \quad [\mu_0] = \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-2}.$$

Сопоставляя степени размерностей основных единиц, получаем

$$RQ \sim v_0 \mu^2 \mu_0^2 r^{-3}.$$

Но мы знаем, что  $Q = mgh$ , и поэтому можем записать

$$v_0 \sim \frac{mghRr^3}{\mu^2 \mu_0^2}.$$

Отсюда следует, что для увеличения предельной скорости в два раза необходимо увеличить массу магнита  $m$  в 2 раза (разумеется, оставив неизменными все остальные параметры), шаг  $h$  — в

2 раза, сопротивление каждого кольца – в 2 раза, внешний радиус трубки – в  $\sqrt[3]{2}$  раз, магнитный момент магнита – в  $1/4$  раза.

**Р186.** Скорость электронов остается постоянной по величине в системе отсчета  $K$ , связанной с вакуумной камерой, потому что магнитное поле может изменять только направление скорости движущегося заряда. Рассмотрим другую систему отсчета  $K'$ , перемещающуюся параллельно проводу с постоянной скоростью  $v_0$  относительно первой системы. Мы можем выразить силу Лоренца, действующую на частицу с зарядом  $Q$ , в любой системе координат:

$$\vec{F}' = \vec{F} = Q[\vec{v} \times \vec{B}] = Q[(\vec{v}' + \vec{v}_0) \times \vec{B}] = Q[\vec{v}' \times \vec{B}'] + Q\vec{E}'.$$

Обратим внимание на то, что электрический ток в обеих системах отсчета должен быть одним и тем же. В системе координат  $K$ , где перемещаются электроны, положительные ионы стоят на месте, а сам провод нейтрален. В системе координат  $K'$  скорость электронов, а значит, и ток электронов будут другими, но ток перемещающихся положительных ионов компенсирует изменение тока электронов. Вследствие этого магнитные поля в обеих системах одинаковы:  $\vec{B}' = \vec{B}$ . Из предыдущего равенства следует, что в системе координат  $K'$  к неизменному магнитному полю добавляется электрическое поле, равное  $[\vec{v}_0 \times \vec{B}]$ .

Давайте теперь опишем движение электрона в системе координат  $K'$ . В этой системе имеется перпендикулярное проводу электрическое поле  $E(r)$ :

$$E(r) = v_0 B(r) = \frac{v_0 \mu_0 I}{2\pi r},$$

где  $r$  – расстояние от провода. Интегрируя это выражение, получаем выражение для потенциала:

$$\varphi(r) = -\frac{v_0 \mu_0 I}{2\pi} \ln r.$$

В системе координат  $K'$  начальная скорость электрона (на расстоянии  $r$  от провода) равна  $\sqrt{2}v_0$ , и электрон останавливается только тогда, когда он приблизится на расстояние  $r_0/2$  от провода. Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{1}{2} m (\sqrt{2}v_0)^2 = -\frac{\mu_0 v_0 I Q}{2\pi} \left( \ln \frac{r_0}{2} - \ln r_0 \right) = \frac{\mu_0 v_0 I Q}{2\pi} \ln 2,$$

где  $m$  – масса и  $Q$  – заряд электрона.



Подстановка численных значений в это выражение дает начальную скорость электрона:

$$v_0 = \frac{\mu_0 I Q}{2\pi t} \ln 2 = 2,46 \cdot 10^5 \text{ м/с} \approx 250 \text{ км/с}.$$

*Примечания.* а) Начальная скорость  $v_0$  очень большая в макроскопическом масштабе, но очень маленькая для электронов; электрон достигает этой скорости, если он прошел разность потенциалов всего лишь 0,2 В. Так как 250 км/с много меньше, чем скорость света ( $c = 300000 \text{ км/с}$ ), мы оправданно пренебрегли релятивистским увеличением массы электрона.

б) Интересно заметить, что если электрон не может приближаться к проводу ближе чем на  $r_0/2$ , то максимальное расстояние электрона также ограничено и не может быть больше чем  $2r_0$ . В общем случае, если  $r_0/n$  – минимальное расстояние, то максимальное расстояние должно быть  $nr_0$ . Это можно доказать, используя другую систему координат, перемещающуюся со скоростью  $-v_0$ .

**Р187.** На маленькое тело с зарядом  $Q$ , которое движется со скоростью  $\vec{v}$  в электрическом поле напряженностью  $\vec{E}$  и магнитном поле индукцией  $\vec{B}$ , действует сила Лоренца (включающая в себя электрическую и магнитную составляющие)

$$\vec{F} = Q \left( \vec{E} + \left[ \vec{v} \times \vec{B} \right] \right).$$

В системе отсчета, перемещающейся со скоростью  $\vec{v}_0$  относительно неподвижной системы, скорость частицы равна  $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_0$ . Пометим «штрихами» все физические величины в новой системе координат, тогда выражение для силы Лоренца в этой системе будет иметь вид

$$\vec{F}' = Q' \left( \vec{E}' + \left[ \vec{v}' \times \vec{B}' \right] \right).$$

Теперь сравним эти две системы отсчета. Любая сила, которая действует на частицу и которая может быть обнаружена, не может изменяться при переходе от одной системы к другой, т.е.  $\vec{F}' = \vec{F}$ . То же самое справедливо и для электрического заряда:  $Q' = Q$ . (Если бы заряды частицы зависели от их скорости, то первоначально нейтральное тело оказалось бы электрически заряженным, но ничего подобного не наблюдается в природе. Преобразование скоростей приводит к выражению

$$Q \left( \vec{E} + \left[ \vec{v} \times \vec{B} \right] \right) = Q \left( \vec{E}' - \left[ \vec{v}_0 \times \vec{B}' \right] + \left[ \vec{v} \times \vec{B}' \right] \right).$$

Это уравнение должно быть удовлетворено для любого  $v$ , в том

числе и для  $v = 0$  (для неподвижных частиц). Поэтому

$$\overline{B'} = \overline{B},$$

откуда следует, что

$$\overline{E'} = \overline{E} + [\vec{v}_0 \times \overline{B}].$$

Заметим, что электрические и магнитные поля не являются независимыми физическими величинами, их значения зависят от скорости системы отсчета.

Рассмотрим систему отсчета, которая движется вместе с жидкостью. Чтобы перейти к этой системе координат от системы координат конденсатора, требуется такое преобразование:  $\vec{v}_0 = -\vec{v}$ . Магнитное поле в этой новой системе координат неизменно:  $\overline{B'} = \overline{B}$ , но в ней появляется электрическое поле  $\overline{E'}$ . Неподвижная в этой системе координат жидкость поляризуется этим полем, и, следовательно, напряженность электрического поля уменьшается в  $\epsilon$  раз и становится равной

$$\overline{E'} = \frac{[-\vec{v} \times \overline{B}]}{\epsilon}.$$

Теперь снова перейдем в неподвижную систему отсчета, что требует такого преобразования:  $v_0 = v$ . Магнитное поле опять не меняется:  $\overline{B''} = \overline{B'} = \overline{B}$ , но электрическое поле преобразуется:

$$\overline{E''} = \overline{E'} + [\vec{v}_0 \times \overline{B}] = \frac{[-\vec{v} \times \overline{B}]}{\epsilon} + [\vec{v} \times \overline{B}] = \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) [\vec{v} \times \overline{B}].$$

Таким образом, разность потенциалов на пластинах конденсатора будет равна

$$U = vBd \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right).$$

Очевидно, что материалы, которые не поляризуются ( $\epsilon = 1$ ), не создают разности потенциалов, т.е.  $U = 0$ , в то время как в случае легко поляризуемых материалов (металлов)  $U = vBd$ .

Это последнее уравнение, описывающее эффект Холла, можно интерпретировать следующим образом. Заряды в проводнике, движущиеся в магнитном поле, смещаются силой Лоренца. Поперечное перемещение зарядов продолжается до тех пор, пока возникающее электростатическое поле не уравнивает действие силы Лоренца. Это условие записывается в виде  $QE = QvB$ , откуда получаем вышеупомянутое выражение  $U = Ed = vBd$ .

**Р188.** В основе расчета поведения ядер при  $\alpha$ -,  $\beta$ -распадах и делении ядер лежит капельная модель ядра, которая подразумевает несжимаемость ядерного вещества. Эта модель базируется на экспериментальных данных, говорящих о том, что с ростом числа  $A$  нуклонов в ядре его радиус  $r$  увеличивается по закону  $r \sim \alpha A^{1/3}$ . При объединении слишком большого количества нуклонов в ядре кулоновское отталкивание начинает играть сравнимую роль с ядерными силами притяжения, и ядро может самопроизвольно распадаться. Расчеты показывают, что распад ядер энергетически выгоден для элементов второй половины таблицы Менделеева. Однако на практике естественные распады ядер наблюдаются начиная с ядер урана. Распад урана на три части, а не на две, маловероятен, так как для этого потребовалась бы гораздо большая начальная энергия активации процесса деления.

**Р189.** Даже если вещество нагрето до нескольких тысяч градусов, тепловая энергия его атомов все еще намного меньше энергии связи на один нуклон. По этой причине скорость ядерных реакций обычно независима от температуры.

Однако изотоп  ${}^7_4\text{Be}$  преобразуется в  ${}^7_3\text{Li}$  через К-захват электронов (электрон внутренней К-оболочки может быть захвачен ядром). При температуре несколько тысяч градусов небольшая доля атомов может при столкновениях получить энергию, достаточную для ионизации внутренних электронов на К-оболочке атома. В результате этого вероятность К-захвата для ионизированных атомов бериллия существенно падает. Так как с увеличением температуры увеличивается степень ионизации атомов бериллия, то вероятность радиоактивного распада уменьшается.

**Р190.** В равновесии изотопный состав пропорционален периодам полураспада. Поэтому в тории, который был взят для исследования, содержится почти исключительно  ${}^{232}\text{Th}$ , число атомов которого равно

$$\frac{6,02 \cdot 10^{23}}{232} = 2,595 \cdot 10^{21},$$

а число атомов  ${}^{228}\text{Th}$  составляет

$$\frac{2,595 \cdot 10^{21} \cdot 1,91}{1,41 \cdot 10^{10}} \approx 3,52 \cdot 10^{11}.$$

Больше в этом образце ничего не было.

Теперь мы поместим наш образец в некую замкнутую оболочку и посмотрим, как быстро появится в ней радон и как будет

меняться со временем его количество. Ввиду того что  $^{228}\text{Th}$  распадается за 1,91 года, а радон появляется в этом процессе всего за 3,64 дня, уже через несколько десятков дней будет достигнуто равновесное содержание радона, число атомов которого определяется по формуле

$$\frac{2,595 \cdot 10^{21} \cdot 56}{1,41 \cdot 10^{10} \cdot 3 \cdot 10^7} \approx 3,3 \cdot 10^5.$$

Это количество преобразованных атомов слишком мало, чтобы повлиять на общее количество  $^{228}\text{Th}$ . Поэтому можно считать, что в течение времени порядка времени полураспада  $^{228}\text{Th}$  количество радона будет удерживаться на уровне, найденном выше. Однако наступит такое время, когда атомов  $^{228}\text{Th}$  станет заметно меньше, так как число их еще не успеет пополниться за счет радиоактивного распада  $^{232}\text{Th}$ , а значит, уменьшится и количество атомов радона.

Минимум наступает примерно через 8 лет, когда количество атомов радона за счет распада вновь появляющихся атомов  $^{228}\text{Th}$  становится одинаковым с количеством, которое обеспечивалось остаточным  $^{228}\text{Th}$ . С этого момента снова начинается рост количества атомов радона. Проходит еще некоторое время, и процесс, включающий всю цепочку радиоактивного распада,

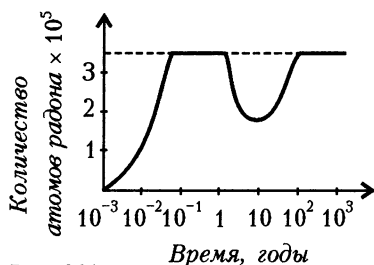


Рис. 261

выходит на стационарный уровень, когда количество продуктов распада пропорционально времени полураспада. Учитывая, что время полураспада  $^{232}\text{Th}$  практически бесконечно, можно считать количество исходного тория постоянным. Из этого следует, что количество атомов радона

опять становится равным  $3,3 \cdot 10^5$  и остается таким и дальше до конца времени исследования в нашей задаче.

На рисунке 261 показан качественный график изменения количества атомов радона  $^{220}_{86}\text{Rn}$  от времени.

**Р191.** Релятивистская энергия  $E$  и импульс  $p$  частицы, которая имеет массу покоя  $m$  и скорость  $v$  порядка скорости света  $c$ , записываются в виде

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad \text{и} \quad p = \frac{mv}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

Из этих уравнений следует, что

$$E = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}.$$

В результате столкновений между частицами могут родиться одна или несколько новых частиц, например пара протон-антипротон (антипротоны имеют ту же самую массу покоя, что и протоны). Считается, что факт рождения частицы произошел тогда, когда в системе центра масс образовалась новая конфигурация материи, у которой импульс относительно центра масс системы равен нулю. Такие процессы всегда пороговые, т.е. происходят при начальной энергии  $E$ , большей некоторой  $E_{\text{порог}}$ . Полная энергия образовавшихся частиц самая низкая, если они остаются вместе, перемещаясь с незначительной скоростью (в системе координат их центра масс). Для пороговой ситуации два старых протона и две новые частицы, протон и антипротон, могут считаться единой частицей с массой четырех протонов  $4m$ , чей импульс равен начальному импульсу налетающего протона. Тогда из закона сохранения полной энергии следует

$$E_{\text{порог}} = E + E_0 = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} + mc^2 = \sqrt{(pc)^2 + (4mc^2)^2}.$$

Возведение в квадрат обеих частей уравнения дает значения параметров налетающего протона:  $p = \sqrt{48}mc$  и  $E_{\text{порог}} = 7mc^2$ . Таким образом, для осуществления реакции по рождению пары протон-антипротон необходимо ускорить первичные протоны до кинетической энергии  $E_k = 7mc^2 - mc^2 = 6mc^2 \approx 6 \text{ ГэВ}$ , для чего требуется ускоряющее напряжение  $U = 6 \cdot 10^9 \text{ В}$ .

**Р192.** Частица с зарядом  $q$  и массой  $m$ , помещенная в клетку Фарадея, индуцирует в ближайшей стенке клетки поверхностные заряды, которые противоположны по знаку заряду частицы. Это приводит к тому, что любая частица притягивается к металлической стенке. Внутри клетки Фарадея такая частица будет с легкостью двигаться в стороны и вниз, но движение вверх будет заторможено действием силы тяжести. Ясно, что есть некоторая поверхность в пространстве клетки, близкая к верхней стенке, на которой заряженная частица находится в равновесии, но это равновесие неустойчивое. Малейшее смещение из него приводит к уходу частицы с этой поверхности и приближению к стенкам, на которых заряд частицы может нейтрализоваться с индуцированным зарядом. Таким образом, любая заряженная частица всегда уходит из внутреннего пространства клетки

Фарадея, независимо от наличия постоянных внешних полей. Это касается и позитрона.

**Р193.** Пусть  $m$  и  $M$  – массы покоя позитрона и протона соответственно ( $M \approx 2000m$ ),  $e$  – элементарный заряд. Из-за большого массового отношения протоны едва ли сдвинулись с места за время, за которое позитроны улетели уже далеко. Приравняем энергию начального состояния к той энергии, с которой позитроны переместились намного дальше, чем 1 см, и летят со скоростью  $v_1$ :

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{4}{a} + \frac{2}{\sqrt{2}a} \right) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{2}a} + 2 \frac{mv_1^2}{2}.$$

Подставив числовые значения, получим  $v_1 = 350$  м/с. После этого скорость позитронов изменяется мало.

С другой стороны, протоны, которые почти не двигались, пока позитроны были близко, впоследствии отталкивают друг друга и ускоряются до скорости  $v_2$ , согласно уравнению

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{2}a} = 2 \frac{Mv_2^2}{2},$$

откуда получаем скорость протонов:  $v_2 \approx 2,7$  м/с.

**Р194.** Общие уравнения сохранения энергии и импульса для комптоновского рассеяния имеют вид

$$hf_0 + m_0c^2 = hf + mc^2,$$

$$\frac{hf_0}{c} = \frac{hf}{c} \cos \alpha + p \cos \beta,$$

$$\frac{hf}{c} \sin \alpha = p \sin \beta,$$

$$(mc^2)^2 = (m_0c^2)^2 + (pc)^2,$$

где  $f_0$  и  $f$  – частоты налетающего и рассеянного фотонов соответственно,  $\alpha$  и  $\beta$  – фотонные и электронные углы рассеяния (рис. 262),  $m_0$  – масса покоя электрона.

Для рассматриваемого частного случая

$$hf_0 = m_0c^2 \text{ и } \frac{hf}{c} = p.$$

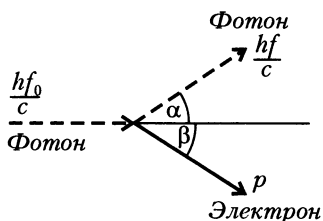


Рис. 262

Поэтому, решая исходную систему уравнений, находим

$$\alpha = \beta = \arccos \frac{2}{3} \approx 48,2^\circ,$$

так что угол между импульсами рассеянного фотона и отскакивающего электрона равен  $\alpha + \beta \approx 96,4^\circ$ .

Импульс рассеянного электрона равен

$$p = \frac{3}{4} m_0 c = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - (v/c)^2}},$$

откуда скорость электрона равна  $v = (3/5)c$ , т.е. порядка скорости света. Результат подтверждает правомерность использования релятивистских формул.

**Р195.** Энергия фотона частотой  $f$  равна  $E_\phi = hf$ , импульс фотона равен  $p_\phi = hf/c$ , где  $h$  – постоянная Планка и  $c$  – скорость света. Энергия фотона после столкновения уменьшается до  $hf'$ , его импульс – до величины  $hf'/c$ , причем новый импульс перпендикулярен первоначальному.

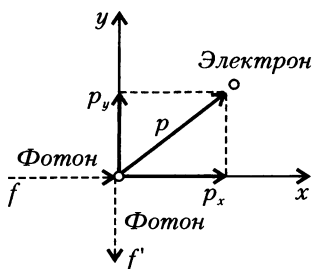


Рис. 263

На рисунке 263 показана ситуация до и после столкновения фотона с неподвижным электроном, которая качественно отражает закон сохранения импульса системы. Импульс электрона разложен на две составляющие:  $p_x = hf/c$  и  $p_y = hf'/c$ . Релятивистскую энергию частицы можно записать в виде

$$E = \sqrt{(pc)^2 + (m_0 c^2)^2}.$$

На основе сказанного запишем закон сохранения полной энергии системы:

$$hf + m_0 c^2 = hf' + \sqrt{(p_x^2 + p_y^2) c^2 + (m_0 c^2)^2}.$$

Отсюда получим формулу для увеличения длины волны  $\Delta\lambda$  фотона:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{c}{f'} - \frac{c}{f} = \frac{hc}{m_0 c^2} = \frac{h}{m_0 c} \approx 2,4 \cdot 10^{-12} \text{ м}.$$

*Примечание.* Эта величина имеет размерность длины и зависит только от массы электрона, скорости света и постоянной

Планка. Она сама является фундаментальной постоянной и называется комптоновской длиной волны электрона. (Существуют также комптоновская длина волны протона, нейтрона и других элементарных частиц.) Эта величина часто используется при оценке процессов в ядерной физике, она характеризует размер области взаимодействия частиц.

**Р196.** Запишем неравенство для электростатической энергии классического электрона как заряженного шарика и его энергии покоя:

$$\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} < mc^2,$$

откуда получим выражение для радиуса:

$$r > \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{2mc^2} = 1,4 \cdot 10^{-15} \text{ м}.$$

Это значение называется классическим радиусом  $r_e$  электрона.

Классический электрон рассматривается в виде шарика радиусом  $r$  с однородным распределением масс, который вращается с угловой скоростью  $\omega$ , имея момент импульса  $L$ , соответствующий моменту импульса вращающегося твердого тела. Следовательно, мы получаем

$$\frac{2}{5} mr^2 \omega = \frac{h}{4\pi}.$$

Это дает «экваториальную» скорость  $v_{\text{экв}} = r\omega = 350 \text{ с}$ . Так как эта скорость во много раз выше, чем предельная скорость, то первоначальная версия классической электронной модели, разработанная Лоренцом и Абрагамом в начале XX века, была отвергнута.

Согласно модифицированной модели, электрон может быть представлен заряженной сферой радиусом  $r$ , которая не вращается, но содержит магнитный диполь — чтобы объяснить экспериментальный факт наличия у электрона магнитного момента импульса. Вне электрона векторное произведение электрического и магнитного полей  $[\vec{E} \times \vec{B}]$  описывает поток электромагнитного импульса. Этот поток несет момент импульса, и при подходящем выборе параметров он может быть равен измеренному моменту импульса электрона.

**Р197.** Предположим, что электрон занимает горизонтальный слой толщиной  $H$  над дном коробки. Его вертикальная координата тогда известна с точностью  $H$ . Поэтому неопределенность в



его вертикальном импульсе должна быть, по крайней мере,

$$\Delta p \approx \frac{\hbar}{\Delta x} \approx \frac{\hbar}{H},$$

где  $\hbar = h/(2\pi)$  – постоянная Планка («перечеркнутая»). В такой модели электрон имеет потенциальную энергию

$$E_{\text{п}} \approx \frac{mgH}{2}$$

и кинетическую энергию

$$E_{\text{к}} = \frac{\Delta p^2}{2m} \approx \frac{\hbar^2}{2mH^2}.$$

Таким образом, его полная энергия равна

$$E(H) = E_{\text{п}}(H) + E_{\text{к}}(H) = aH + b \frac{1}{H^2},$$

где  $a$  и  $b$  – постоянные, определяемые вышеупомянутыми уравнениями. Если  $H$  мало, то потенциальная энергия тоже мала, а кинетическая энергия велика. Если, с другой стороны,  $H$  велико, то кинетическая энергия мала, а потенциальная энергия велика. Полная энергия минимальна, если  $E_{\text{п}}(H)$  порядка  $E_{\text{к}}(H)$ .

Используя дифференциальное исчисление, можно показать, что оптимальное значение для отношения энергий равно 2:1 в пользу потенциальной энергии. Поскольку мы хотим получить только грубую оценку, отношение энергий можно взять за единицу. Тогда получим

$$H \approx \left( \frac{\hbar^2}{m^2 g} \right)^{1/3} \approx 1 \text{ мм}.$$

Это весьма большая величина по сравнению с обычными микроскопическими размерами. Причина в том, что гравитация очень слаба по сравнению с реальным электромагнитным взаимодействием, которое определяет энергию связи и размеры молекул.

**Р198.** Если ядро с атомным номером  $Z$  удерживает электрон в сфере радиусом  $r$ , то энергия электростатического взаимодействия электрона с ядром равна  $E_{\text{э}} = -kZe^2/r$ , а его импульс равен  $p = \hbar/r$ . Если  $Z \gg 1$  (т.е. ядро тяжелое), то кинетическую энергию сильно связанного электрона можно рассчитать, используя релятивистскую формулу:

$$E_{\text{к}} = \sqrt{(pc)^2 + (m_0 c^2)^2} - m_0 c^2 \approx pc = \frac{\hbar c}{r},$$

где  $c$  – скорость света. Полная энергия электрона равна

$$E(r) = E_s(r) + E_k(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} + \frac{\hbar c}{r}.$$

Если воспользоваться постоянной тонкой структуры  $e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) \approx 1/137$ , то полную энергию электрона для небольших значений  $r$  можно представить в виде

$$E(r) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot (137 - Z) \frac{1}{r}.$$

(Полученное выражение неверно для больших значений  $r$ , так как тогда необходимо было бы использовать нерелятивистский импульс электрона.)

Согласно полученной формуле, электрон может удерживаться в ядре, если  $Z > 137$  (или, скорее, он может быть локализован внутри маленького объема размера ядра). Число 137 – это только оценка критического атомного числа; более точные вычисления, которые принимают во внимание конечный размер ядра, дают для  $Z_{\text{крит}}$  значения 150–160.

Итак, вычисления показывают, что электрон мог бы быть ограничен областью ядра элемента с атомным номером больше чем 150, если бы могли существовать трансурановые элементы таких высоких атомных чисел.

**Р199.** Скорость распространения поверхностных волн зависит от коэффициента поверхностного натяжения  $\sigma$  и плотности  $\rho$  воды, а также от длины волны  $\lambda$ . Эти величины имеют следующие размерности:

$$[\sigma] = \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}, \quad [\rho] = \text{кг} \cdot \text{м}^{-3}, \quad [\lambda] = \text{м}.$$

Выражение для скорости можно получить только из этих величин, если  $\sigma$  и  $\rho$  входят в виде комбинации  $\sigma/\rho$ . Однако, так как  $[\sigma/\rho] = \text{м}^3 \cdot \text{с}^{-2}$ , то, для того чтобы получить размерность скорости, это выражение необходимо разделить на длину волны и затем извлечь квадратный корень. В итоге анализ размерностей показывает, что скорость распространения капиллярных волн обратно пропорциональна квадратному корню из длины волны:

$$v \sim \sqrt{\frac{\sigma}{\rho\lambda}} \sim \frac{1}{\sqrt{\lambda}}.$$

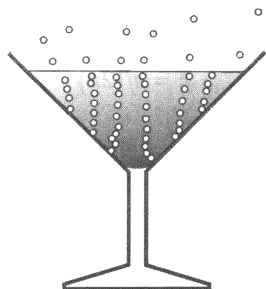
Отсюда (и из исходных данных) мы можем заключить, что скорость распространения поверхностных волн достигла бы

скорости распространения звука в воде, если бы длина волны была порядка  $10^{-8}$  см.

Так как скорость распространения поверхностных волн не может быть больше, чем скорость распространения звука (молекулы не могут передать возмущение друг другу на поверхности быстрее, чем внутри вещества), волны длиной меньше  $10^{-8}$  см не имеют никакого смысла. Это, фактически, и есть порядок величины размера молекул воды!

**Р200.** Посмотрев внимательно на бокал с шампанским, вы заметите не только ускорение, но также и увеличение размеров всплывающих пузырьков шампанского. Поскольку искрящееся шампанское перенасыщено двуокисью углерода, газ непрерывно выделяется из жидкости внутрь пузырьков по мере того как пузырьки всплывают. Кроме того, гидростатическое давление падает с высотой и становится равным нулю на поверхности. Вот почему размер пузырьков увеличивается.

Выталкивающая сила пропорциональна объему пузырька ( $\sim r^3$ ), в то время как сила сопротивления (вязкости) пропорциональна только площади поверхности ( $\sim r^2$ ) пузырька. Следовательно, суммарная сила, направленная вверх, растет с увеличением размера пузырька, и он ускоряется по мере подъема. Однако интенсивность роста скорости ограничена, так как с увеличением скорости растет сила сопротивления, и в конечном счете пузырек движется под влиянием совокупности сбалансированных сил.



## ПРИЛОЖЕНИЕ

### НЕКОТОРЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ

Название	Обозначение	Значение
Атомная единица массы	а.е.м.	$1,6605 \cdot 10^{-27}$ кг
Гравитационная постоянная	$G$	$6,6720 \cdot 10^{-11}$ Н·м <sup>2</sup> /кг <sup>2</sup>
Коэффициент в законе Кулона	$k = 1/(4\pi\epsilon_0)$	$9,00 \cdot 10^9$ м/Ф
Магнитная постоянная	$\mu_0$	$1,257 \cdot 10^{-6}$ Гн/м
Масса нейтрона	$m_n$	$1,6750 \cdot 10^{-27}$ кг
Масса протона	$m_p$	$1,6726 \cdot 10^{-27}$ кг
Масса электрона	$m_e$	$9,1095 \cdot 10^{-31}$ кг
Масса дейтрона	$m_d$	$3,3436 \cdot 10^{-27}$ кг
Отношение масс протона и электрона	$m_p/m_e$	1836,15
Постоянная Авогадро	$N_A$	$6,0220 \cdot 10^{23}$ моль <sup>-1</sup>
Постоянная Больцмана	$k = R/N_A$	$1,3807 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Постоянная Планка	$h$	$6,6262 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Постоянная Планка	$\hbar = h/(2\pi)$	$1,0546 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Постоянная Ридберга	$R_\lambda$	$1,0974 \cdot 10^7$ м <sup>-1</sup>
Постоянная Фарадея	$F = N_A e$	96485,3 Кл/моль
Скорость света в вакууме	$c$	$2,9979 \cdot 10^8$ м/с
Удельный заряд электрона	$e/m_e$	$1,7588 \cdot 10^{11}$ Кл/кг
Универсальная газовая постоянная	$R$	8,3144 Дж/(моль·К)
Электрическая постоянная	$\epsilon_0$	$8,8542 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Элементарный заряд	$e$	$1,6022 \cdot 10^{-19}$ Кл
Энергия покоя нейтрона	$m_n c^2$	939,57 МэВ
Энергия покоя протона	$m_p c^2$	938,28 МэВ
Энергия покоя электрона	$m_e c^2$	0,5110 МэВ

## АСТРОНОМИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ

Название	Обозначение	Значение
Стандартное ускорение свободного падения	$g$	$9,8067 \text{ м/с}^2$
Масса Земли	$M_З$	$5,976 \cdot 10^{24} \text{ кг}$
Плотность Земли (средняя)	$\rho_З$	$5,52 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$
Радиус Земли (средний)	$R_З$	$6378 \text{ км}$
Расстояние от Земли до Луны (среднее)	—	$3,844 \cdot 10^8 \text{ м}$
Расстояние от Земли до Солнца (среднее)	—	$1,496 \cdot 10^{11} \text{ м}$
Масса Солнца	$M_С$	$1,99 \cdot 10^{30} \text{ кг}$
Радиус Солнца (средний)	$R_С$	$6,96 \cdot 10^8 \text{ м}$
Плотность Солнца (средняя)	$\rho_С$	$1,41 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$
Масса Луны	$M_Л$	$7,35 \cdot 10^{22} \text{ кг}$
Радиус Луны	$R_Л$	$1,74 \cdot 10^6 \text{ м}$

## ДЕСЯТИЧНЫЕ ПРИСТАВКИ

Множи- тель	Приставка		Множи- тель	Приставка	
	наименование	обозначение		наименование	обозначение
$10^{18}$	экса	Э	$10^{-1}$	деци	д
$10^{15}$	пета	П	$10^{-2}$	санتي	с
$10^{12}$	тера	Т	$10^{-3}$	милли	м
$10^9$	гига	Г	$10^{-6}$	микро	мк
$10^6$	мега	М	$10^{-9}$	нано	н
$10^3$	кило	к	$10^{-12}$	пико	п
$10^2$	гекто	г	$10^{-15}$	фемто	ф
$10^1$	дека	да	$10^{-18}$	атто	а

## ЕДИНИЦЫ СИ

Величина	Наименование	Обозначение
<b>Основные единицы</b>		
Длина	метр	м
Масса	килограмм	кг
Время	секунда	с
Сила электрического тока	ампер	А
Абсолютная температура	кельвин	К
Количество вещества	моль	моль
Сила света	кандела	кд
<b>Дополнительные единицы</b>		
Плоский угол	радиан	рад
Телесный угол	стерадиан	ср

## СОДЕРЖАНИЕ

---

Предисловие от редакции	3
<i>Часть первая.</i> УСЛОВИЯ ЗАДАЧ	5
<i>Часть вторая.</i> ПОДСКАЗКИ К ЗАДАЧАМ	47
<i>Часть третья.</i> РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ	67
ПРИЛОЖЕНИЕ	266
Некоторые физические постоянные	266
Астрономические постоянные	267
Десятичные приставки	267
Единицы СИ	268

*Петер Гнэдиг, Дьюла Хоньек, Кен Райли*

## **Двести интригующих физических задач**

**(Избранные задачи  
международных олимпиад)**

Перевод с английского

Библиотечка «Квант»

Выпуск 90

Научный редактор С.С. Кротов

Редактор В.А. Тихомирова

Обложка А.Е. Пацхверия

Макет и компьютерная верстка Е.В. Морозова

Компьютерная группа Е.А. Митченко, Л.В. Калиничева

Ответственный за выпуск Л.Ф. Соловейчик

ИБ № 75

Формат 84х108 1/32. Бум. офсетная. Гарнитура кудряшевская.

Печать офсетная. Объем 8,5 печ.л. тираж 5000 экз.

Заказ 1627

119296 Москва, Ленинский пр., 64-А, «Квант», тел.: (095)930-56-48

e-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info, phys@kvant.info

Диапозитивы изготовлены ООО «Европолиграфик»

Отпечатано в ОАО «КТС»

При участии ЗАО «РИЦ «Техносфера», тел.: (095) 234-01-10

**ВЫШЛИ ИЗ ПЕЧАТИ  
В СЕРИИ «БИБЛИОТЕЧКА «КВАНТ»**

1. *М.П.Бронштейн*. Атомы и электроны
2. *М.Фарадей*. История свечи
3. *О.Оре*. Приглашение в теорию чисел
4. Опыты в домашней лаборатории
5. *И.Ш.Слободецкий, Л.Г.Асламазов*. Задачи по физике
6. *Л.П.Мочалов*. Головоломки
7. *П.С.Александров*. Введение в теорию групп
8. *В.Г.Штейнгауз*. Математический калейдоскоп
9. Замечательные ученые
10. *В.М.Глушков, В.Я.Валах*. Что такое ОГАС?
11. *Г.И.Копылов*. Всего лишь кинематика
12. *Я.А.Сморodinский*. Температура
13. *А.Е.Карпов, Е.Я.Гик*. Шахматный калейдоскоп
14. *С.Г.Гиндикин*. Рассказы о физиках и математиках
15. *А.А.Боровой*. Как регистрируют частицы
16. *М.И.Каганов, В.М.Цукерник*. Природа магнетизма
17. *И.Ф.Шарыгин*. Задачи по геометрии: планиметрия
18. *Л.В.Тарасов, А.Н.Тарасова*. Беседы о преломлении света
19. *А.Л.Эфрос*. Физика и геометрия беспорядка
20. *С.А.Пикин, Л.М.Блинов*. Жидкие кристаллы
21. *В.Г.Болтянский, В.А.Ефремович*. Наглядная топология
22. *М.И.Башмаков, Б.М.Беккер, В.М.Гольховой*. Задачи по математике: алгебра и анализ
23. *А.Н.Колмогоров, И.Г.Журбенко, А.В.Прохоров*. Введение в теорию вероятностей
24. *Е.Я.Гик*. Шахматы и математика
25. *М.Д.Франк-Каменецкий*. Самая главная молекула
26. *В.С.Эдельман*. Вблизи абсолютного нуля
27. *С.Р.Филонович*. Самая большая скорость
28. *Б.С.Бокштейн*. Атомы блуждают по кристаллу
29. *А.В.Бялко*. Наша планета – Земля
30. *М.Н.Аршинов, Л.Е.Садовский*. Коды и математика
31. *И.Ф.Шарыгин*. Задачи по геометрии: стереометрия



32. *В.А.Займовский, Т.Л.Колупаева.* Необычные свойства обычных металлов
33. *М.Е.Левинштейн, Г.С.Симин.* Знакомство с полупроводниками
34. *В.Н.Дубровский, Я.А.Сморodinский, Е.Л.Сурков.* Релятивистский мир
35. *А.А.Михайлов.* Земля и ее вращение
36. *А.П.Пурмаль, Е.М.Слободецкая, С.О.Травин.* Как превращаются вещества
37. *Г.С.Воронов.* Штурм термоядерной крепости
38. *А.Д.Чернин.* Звезды и физика
39. *В.Б.Брагинский, А.Г.Полнарев.* Удивительная гравитация
40. *С.С.Хилькевич.* Физика вокруг нас
41. *Г.А.Звенигородский.* Первые уроки программирования
42. *Л.В.Тарасов.* Лазеры: действительность и надежды
43. *О.Ф.Кабардин, В.А.Орлов.* Международные физические олимпиады школьников
44. *Л.Е.Садовский, А.Л.Садовский.* Математика и спорт
45. *Л.Б.Окунь.*  $\alpha\beta\gamma\dots Z$  : элементарное введение в физику элементарных частиц
46. *Я.Е.Гегузин.* Пузыри
47. *Л.С.Марочник.* Свидание с кометой
48. *А.Т.Филиппов.* Многоликий солитон
49. *К.Ю.Богданов.* Физик в гостях у биолога
50. Занимательно о физике и математике
51. *Х.Рачлис.* Физика в ванне
52. *В.М.Липунов.* В мире двойных звезд
53. *И.К.Кикоин.* Рассказы о физике и физиках
54. *Л.С.Понтрягин.* Обобщения чисел
55. *И.Д.Данилов.* Секреты программируемого микрокалькулятора
56. *В.М.Тихомиров.* Рассказы о максимумах и минимумах
57. *А.А.Силин.* Трение и мы
58. *Л.А.Ашкинази.* Вакуум для науки и техники
59. *А.Д.Чернин.* Физика времени
60. Задачи московских физических олимпиад
61. *М.Б.Балк, В.Г.Болтянский.* Геометрия масс
62. *Р.Фейнман.* Характер физических законов
63. *Л.Г.Асламазов, А.А.Варламов.* Удивительная физика
64. *А.Н.Колмогоров.* Математика – наука и профессия
65. *М.Е.Левинштейн, Г.С.Симин.* Барьеры: от кристалла до интегральной схемы
66. *Р.Фейнман.* КЭД – странная теория света и вещества

67. Я.Б.Зельдович, М.Ю.Хлопов. Драма идей в познании природы
68. И.Д.Новиков. Как взорвалась Вселенная
69. М.Б.Беркинблит, Е.Г.Глаголева. Электричество в живых организмах
70. А.Л.Стасенко. Физика полета
71. А.С.Штейнберг. Репортаж из мира сплавов
72. В.Р.Полищук. Как исследуют вещества
73. Л.Кэрролл. Логическая игра
74. А.Ю.Гросберг, А.Р.Хохлов. Физика в мире полимеров
75. А.Б.Мигдал. Квантовая физика для больших и маленьких
76. В.С.Гетман. Внуки Солнца
77. Г.А.Гальперин, А.Н.Земляков. Математические бильярды
78. В.Е.Белонучкин. Кеплер, Ньютон и все-все-все...
79. С.Р.Филонович. Судьба классического закона
80. М.П.Бронштейн. Солнечное вещество
81. А.И.Буздин, А.Р.Зильберман, С.С.Кротов. Раз задача, два задача...
82. Я.И.Перельман. Знаете ли вы физику?
83. Р.Хонсбергер. Математические изюминки
84. Ю.Р.Носов. Дебют оптоэлектроники
85. Г.Гамов. Приключения мистера Томпкинса
86. И.Ш.Слободецкий, Л.Г.Асламазов. Задачи по физике (2-е изд.)
87. Физика и...
88. А.В.Спивак. Математический праздник
89. Л.Г.Асламазов, И.Ш.Слободецкий. Задачи и не только по физике

## **Новые книги издательства «Техносфера»**

### **Серия «Мир математики»**

- А. Купиллари. «Трудности доказательств. Как преодолеть страх перед математикой» (115 руб.)  
Дж. Шарма, К. Сингх. «Уравнения в частных производных для инженеров» (225 руб.)  
В. Назайкинский, Б. Стернин, В. Шаталов. «Методы некоммутативного анализа» (275 руб.)  
К. Блаттер. «Вейвлет-анализ. Основы теории» (175 руб.)

### **Серия «Мир физики и техники»**

- В. Миронов. «Основы сканирующей зондовой микроскопии» (225 руб.)

### **Серия «Мир материалов и технологий»**

- Ч. Пул, Ф. Оуэнс. «Нанотехнологии» (275 руб.)  
П. Харрис. «Углеродные нанотрубы и родственные структуры. Новые материалы XXI века» (325 руб.)  
Д. Брандон, У. Каплан. «Микроструктура материалов. Методы исследования и контроля» (275 руб.)  
Ф. Мэтьюз, Р. Роллингс. «Композитные материалы. Механика и технологии» (225 руб.)

### **Серия «Мир электроники»**

- К. Фрике. «Вводный курс цифровой электроники» (225 руб.)  
Т. Ратхор. «Цифровые измерения. Методы и схемотехника» (275 руб.)  
Э. Розеншер, Б. Винтер. «Оптоэлектроника» (325 руб.)

### **Серия «Мир программирования»**

- Р. Хаггарти. «Дискретная математика для программистов» (225 руб.)  
Дж. Макконелл. «Основы современных алгоритмов» (225 руб.)  
М. Вернер. «Основы кодирования. Учебник для вузов» (115 руб.)  
Д. Сэлмон. «Сжатие данных, изображений и звука» (225 руб.)

### **Серия «Мир связи»**

- К. Одуан, Б. Гино. «Измерение времени. Основы GPS» (325 руб.)  
Р. Фриман. «Волоконно-оптические системы связи» (325 руб.)  
Р. Морелос-Сарагоса. «Искусство помехоустойчивого кодирования» (225 руб.)

### **Серия «Библиотечка «Квант»**

- А. Спивак. «Математический праздник» (115 руб.)  
Л. Асламазов, И. Слободецкий. «Задачи и не только по физике» (175 руб.)

Указанные цены включают в себя стоимость почтовой доставки по России.

Полная информация о всех вышедших и готовящихся к печати книгах находится на сайте **[www.technosphera.ru](http://www.technosphera.ru)**

Принимаются заявки на книги с доставкой по России наложенным платежом или с предоплатой по счету

- по почте: 125319 Москва, а/я 594, издательство «Техносфера»
- по факсу: (095) 9563346
- по e-mail: **[sales@technosphera.ru](mailto:sales@technosphera.ru)**

Индексы

84498-по каталогу "Роспечать"

26042-по каталогу "Пресса России"

60 =



# Библиотечка КВАНТ



ВЫПУСК

90